

SETUP DRILL 09

万有引力 設定別ドリル

天体の設定を5つに分けた。

新しい公式は**2つだけ** —— 力 $G\frac{Mm}{r^2}$ と、位置エネルギー $-G\frac{Mm}{r}$ 。

あとは**円運動の式とエネルギー保存に入れるだけ**。つまりくのは**位置エネルギーが負で、基準が無限遠**という点。ここを5回確かめる。

使い方

1周目 設定の見出しと公式を読んでから5問続けて解く。

2周目 r が**中心からの距離**（地表からの高さではない）かを毎回確かめる。

3周目 見出しを隠して、円運動かエネルギーかを言ってから解く。

万有引力定数を G 、天体の質量を M 、半径を R とする。

1章

- ☐ 1周
- ☐ 2周
- ☐ 3周

2章

- ☐ 1周
- ☐ 2周
- ☐ 3周

3章

- ☐ 1周
- ☐ 2周
- ☐ 3周

4章

- ☐ 1周
- ☐ 2周
- ☐ 3周

5章

- ☐ 1周
- ☐ 2周
- ☐ 3周

問題編

解説は後半にまとめてある。先に見ないこと。

r は中心からの距離。

SETUP 01

万有引力と地表の重力をつなぐ

記号の約束

G 万有引力定数 M 天体の質量 R 天体の半径 g 地表の重力加速度

この設定を見分ける手がかり

1. 問題文に「地表の重力加速度を g とする」
2. $\rightarrow GM = gR^2$ に書き換えられる合図
3. $\rightarrow$ 答えに G と M が別々に残っていたら、この式で消せないか見る

この設定で使う公式

- $F = G \frac{Mm}{r^2}$
- 地表で: $mg = G \frac{Mm}{R^2} \rightarrow GM = gR^2$
- 高さ h での重力加速度: $g' = \frac{gR^2}{(R+h)^2}$

1-1 つなぎの式 ★

3周チェック ☐ ☐ ☐

質量 M 、半径 R の天体の地表での重力加速度を g とする。

1. g を G 、 M 、 R で表せ。
2. GM を g 、 R で表せ。

1-2 上空 ★★3周チェック ☐ ☐ ☐

地表からの高さ h の位置での重力加速度 g' を考える。

1. g' を G 、 M 、 R 、 h で表せ。
2. g を使って表せ。
3. $h = R$ のとき g' はいくらか。

1-3 別の天体 ★★3周チェック ☐ ☐ ☐

ある惑星の質量は地球の 2 倍、半径は地球の 2 倍である。地球の地表の重力加速度を g とする。

1. この惑星の地表での重力加速度を求めよ。
2. 理由を式で説明せよ。

1-4 深さ ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

密度が一定な半径 R 、質量 M の天体の中心から距離 r ($r < R$) の点を考える。球殻の内部では、その外側にある部分からの引力は打ち消し合って 0 になることが知られている。

1. 引力に効く内側の部分の質量を求めよ。
2. そこでの重力加速度を求めよ。
3. 中心ではどうなるか。

1-5 見かけの重力 ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

半径 R の天体が、周期 T で自転している。赤道上に置いた質量 m の物体を考える。

1. 自転による向心加速度を求めよ。
2. ばねばかりが示す値を求めよ。
3. 物体が地表から浮き上がる自転周期を求めよ。

SETUP 02

円軌道をまわる衛星

記号の約束

r 中心からの距離 h 地表からの高さ v 衛星の速さ T 公転周期

この設定を見分ける手がかり

1. 問題文に「円軌道」「等速で公転」
2. → 万有引力＝向心力とおく、これだけ
3. → m （衛星の質量）は必ず消える

この設定で使う公式

- $G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$
- $G\frac{Mm}{r^2} = mr\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM}$
- g が与えられていれば $GM = gR^2$ で置き換える

2-1 速さ ★★

3周チェック ☐ ☐ ☐

質量 M の天体のまわりを、質量 m の衛星が半径 r の円軌道で回っている。

1. 運動方程式を書け。
2. 速さを求めよ。
3. 衛星の質量によるか。

2-2 第一宇宙速度 ★★3周チェック ☐ ☐ ☐

地表すれすれ（半径 R ）を回る衛星を考える。地表の重力加速度を g とする。

1. 速さを g 、 R で表せ。
2. 周期を求めよ。

2-3 高いほど ★★3周チェック ☐ ☐ ☐

円軌道の衛星について答えよ。

1. 軌道半径を4倍にすると速さは何倍か。
2. 周期は何倍か。
3. 高い軌道の衛星は速いか遅いか。

2-4 静止衛星 ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

地球（質量 M 、半径 R 、自転周期 T_0 ）の赤道上空を、地表から見て止まって見えるように回る衛星を考える。

1. この衛星の公転周期はいくらか。
2. 軌道半径を求めよ。
3. 地表からの高さを求めよ。

2-5 天体の質量を測る ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

ある惑星のまわりを、半径 r 、周期 T の円軌道で衛星が回っているのが観測された。

1. 惑星の質量を求めよ。
2. この方法で衛星自身の質量は分かるか。

SETUP 03

ケプラーの法則を使う

記号の約束

a 楕円の半長軸 T 公転周期

この設定を見分ける手がかり

1. 問題文に「2つの天体の周期を比べよ」「楕円軌道」
2. → 同じ天体のまわりを回るものどうしなら比で解ける
3. → G も M も知らなくてよい

この設定で使う公式

- 第1：軌道は楕円（焦点の一方が中心天体）
- 第2：面積速度一定 → $r_1 v_1 = r_2 v_2$ （近点・遠点で）
- 第3： $\frac{T^2}{a^3} = \text{一定}$ （ a は半長軸）

3-1 第3法則 ★★

3周チェック ☐ ☐ ☐

同じ恒星のまわりを回る2つの惑星がある。半長軸の比が $1:4$ である。

1. 周期の比を求めよ。
2. 半長軸が 9 倍の惑星の周期は何倍か。

3-2 円は楕円の特別な場合 ★★3周チェック ☐ ☐ ☐

円軌道について答えよ。

1. 円軌道の半長軸は何か。
2. $T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM}$ が第3法則と合っていることを説明せよ。

3-3 面積速度 ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

楕円軌道の惑星が、中心天体から最も近い点（距離 r_1 ）を速さ v_1 で、最も遠い点（距離 r_2 ）を速さ v_2 で通過する。

1. 面積速度一定から成り立つ関係を書け。
2. v_2 を求めよ。
3. 近点と遠点で速いのはどちらか。

3-4 エネルギーと連立 ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

質量 M の天体のまわりを回る質量 m の惑星が、近点（距離 r_1 ）で速さ v_1 、遠点（距離 r_2 ）で速さ v_2 である。

1. エネルギー保存の式を書け。
2. 面積速度の式とあわせて v_1 を求めよ。

3-5 軌道を変える ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

半径 r_1 の円軌道を回っていた宇宙船が、ある点で加速して楕円軌道に移り、反対側で距離 r_2 に達した。

1. この楕円軌道の半長軸を求めよ。
2. 楕円軌道の周期を求めよ。
3. 移動にかかる時間を求めよ。

SETUP 04

万有引力の位置エネルギー

記号の約束

U 万有引力による位置エネルギー v_e 脱出速度

この設定を見分ける手がかり

1. 問題文に「無限遠まで」「打ち上げる」「到達する高さ」
2. $\rightarrow U = -G \frac{Mm}{r}$ (無限遠が基準、つねに負)
3. $\rightarrow mgh$ は地表付近でしか使えない近似

この設定で使う公式

- $U = -G \frac{Mm}{r}$
- $\frac{1}{2}mv^2 - G \frac{Mm}{r} = \text{一定}$
- 無限遠に届く条件：合計 ≥ 0

4-1 符号の意味 ★★

3周チェック ☐ ☐ ☐

万有引力による位置エネルギーについて答えよ。

1. どこを基準に取っているか。
2. なぜつねに負なのか。
3. r が大きくなると増えるか減るか。

4-2 脱出速度 ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

質量 M 、半径 R の天体の地表から、質量 m の物体を打ち上げて無限遠まで到達させたい。

1. エネルギー保存の式を書け。
2. 必要な最小の速さを求めよ。
3. 地表の重力加速度 g を使って表せ。

4-3 到達高度 ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

質量 M 、半径 R の天体の地表から、質量 m の物体を鉛直上向きに速さ v_0 ($v_0 < \sqrt{2gR}$) で打ち上げた。

1. 最高点の中心からの距離を求めよ。
2. 地表からの高さを求めよ。

4-4

 mgh との関係 ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

地表からの高さ h が R に比べて十分小さいとき、位置エネルギーの変化を考える。

1. $-\frac{GMm}{R+h} - \left(-\frac{GMm}{R}\right)$ を計算せよ。
2. $h \ll R$ として近似せよ。
3. 何が言えるか。

4-5

衛星の全エネルギー ★★★

3周チェック ☐ ☐ ☐

半径 r の円軌道を回る質量 m の衛星について答えよ。

1. 運動エネルギーを求めよ。
2. 力学的エネルギーの合計を求めよ。
3. その符号から何が言えるか。

SETUP 05

どの道具を使うか（総合）

記号の約束

r_1, r_2 近点・遠点の距離 v_1, v_2 そこでの速さ

この設定を見分ける手がかり

1. 円軌道で速さ・周期 → 引力＝向心力
2. 2つの天体を比べる → ケプラー第3法則
3. 距離が大きく変わる・到達点 → エネルギー保存 ($U = -\frac{GMm}{r}$)

この設定で使う公式

- 円運動: $G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$
- 比較: $\frac{T^2}{a^3}$ 一定
- 移動: $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$ 一定 + $r_1v_1 = r_2v_2$

5-1 選ぶ ★★

3周チェック ☐ ☐ ☐

次の問いをどの道具で解くか答えよ。

1. 半径 r の円軌道の衛星の速さ。
2. 半長軸が2倍の惑星の周期。
3. 地表から打ち上げて到達する最高点。

5-2

 mgh か U か ★★3周チェック ☐ ☐ ☐

位置エネルギーとして mgh と $-\frac{GMm}{r}$ のどちらを使うか答えよ。

1. 高さ 10 m からの落下。
2. 高度 400 km の宇宙ステーションへの打ち上げ。
3. 月まで行くロケット。

5-3

軌道を上げる ★★★

3周チェック ☐ ☐ ☐

半径 r_1 の円軌道の衛星を、半径 r_2 ($> r_1$) の円軌道に移す。

1. それぞれの軌道での力学的エネルギーを求めよ。
2. 必要なエネルギーを求めよ。
3. 移した後、衛星の速さは増えるか減るか。

5-4 2つの法則の確認 ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

円軌道の衛星について、ケプラーの3つの法則がどうなるか答えよ。

1. 第1法則
2. 第2法則
3. 第3法則

5-5 総合 ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

質量 M 、半径 R の天体の地表すれすれの円軌道を回っていた宇宙船が、ある点で瞬間的に加速して、遠点が $4R$ の楕円軌道に移った。

1. 加速前の速さを求めよ。
2. 楕円軌道の近点での速さを求めよ。
3. 楕円軌道の周期を求めよ。

解説編

各問の冒頭にどの式に入れたかを書いてある。

設定 1 万有引力と地表の重力をつなぐ

1-1 地表で等号を作る

■(1) 地表に置いた質量 m の物体について

$$mg = G \frac{Mm}{R^2} \rightarrow g = \frac{GM}{R^2}$$

■(2) $GM = gR^2$

問題文に g が与えられていたら、この式で GM を消す。

答 (1) $\frac{GM}{R^2}$ (2) gR^2

1-2 $r = R + h$

■(1) 中心からの距離は $R + h$

$$g' = \frac{GM}{(R + h)^2}$$

■(2) $GM = gR^2$ を代入

$$g' = \frac{gR^2}{(R + h)^2}$$

■(3) $g' = \frac{gR^2}{(2R)^2} = \frac{g}{4}$

高さ h ではなく中心からの距離 $R + h$ を使う。最頻出のミス。

答 (1) $\frac{GM}{(R + h)^2}$ (2) $\frac{gR^2}{(R + h)^2}$ (3) $\frac{g}{4}$

1-3 比で考える

$$\blacksquare(1) \quad g' = \frac{G(2M)}{(2R)^2} = \frac{2GM}{4R^2} = \frac{g}{2}$$

$$\blacksquare(2) \quad g \propto \frac{M}{R^2} \text{ なので、}$$

質量が2倍で分子が2倍、半径が2倍で分母が4倍。

差し引き $\frac{1}{2}$ 倍。

半径は2乗で効くので、大きい天体ほど表面の重力は弱まりやすい。

答 (1) $\frac{g}{2}$ (2) $g \propto M/R^2$ で分母が4倍になるから

1-4 外側は効かない

$$\blacksquare(1) \text{ 体積比が } \left(\frac{r}{R}\right)^3 \text{ なので}$$

$$M' = M \frac{r^3}{R^3}$$

$$\blacksquare(2) \quad g'' = \frac{GM'}{r^2} = \frac{GMr}{R^3} = \frac{gr}{R}$$

$$\blacksquare(3) \quad r = 0 \text{ で } g'' = 0。$$

内部では中心からの距離に比例する。

$-Kx$ の形なので、貫通トンネルを落ちると単振動になる。

答 (1) $M \frac{r^3}{R^3}$ (2) $\frac{gr}{R}$ (3) 0

1-5 自転の効果

$$\blacksquare(1) \quad a = R\omega^2 = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

$$\blacksquare(2) \text{ 中心向きを正とすると}$$

$$ma = mg - N \rightarrow N = m \left(g - \frac{4\pi^2 R}{T^2} \right)$$

$$\blacksquare(3) \quad N = 0 \text{ より } T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$$

また $N = 0$ の判定。

この周期は、地表すれすれを回る衛星の周期と同じ式になる。

答 (1) $\frac{4\pi^2 R}{T^2}$ (2) $m \left(g - \frac{4\pi^2 R}{T^2} \right)$ (3) $2\pi \sqrt{R/g}$

設定 2 円軌道をまわる衛星

2-1 引力=向心力

$$\blacksquare(1) \quad G \frac{Mm}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

■(2) 両辺の m が消えて

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

■(3) よらない。

重いほど強く引かれるが、重いほど曲がりにくい。ちょうど打ち消す。

答 (2) $\sqrt{\frac{GM}{r}}$ (3) よらない

2-2 $r = R$ を代入

$$\blacksquare(1) \quad v = \sqrt{\frac{GM}{R}} \text{ に } GM = gR^2 \text{ を代入}$$

$$v = \sqrt{gR}$$

$$\blacksquare(2) \quad T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$$

設定1(5) の「浮き上がる自転周期」と同じ式。

地球なら約 7.9 km/s、約 85 分。

答 (1) $\sqrt{gR}$ (2) $2\pi\sqrt{R/g}$

2-3 r 依存を読む

$$\blacksquare(1) \quad v \propto \frac{1}{\sqrt{r}} \rightarrow \frac{1}{2} \text{ 倍}$$

$$\blacksquare(2) \quad T \propto r^{3/2} \rightarrow 4^{3/2} = 8 \text{ 倍}$$

■(3) 遅い。

遠いほど引力が弱く、ゆっくり回れば足りる。

距離が長いうえに遅いので、周期はいつそう長くなる。

答 (1) 1/2 倍 (2) 8倍 (3) 遅い

2-4 T から r を出す

■(1) 地球の自転と同じ T_0

■(2) $T_0^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM}$ を r について解く
$$r = \left(\frac{GMT_0^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}$$

■(3) $h = r - R$

地球では約 3.6 万 km。この高さは1つしかないので、
静止衛星は全部同じ高さの輪の上に並んでいる。

答 (2) $\left(\frac{GMT_0^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}$ (3) $r - R$

2-5 逆に解く

■(1) $T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM}$ を M について解く
$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

■(2) 分からない。

式から m が消えているので、観測される軌道は衛星の質量によらない。

「回られている側」の質量だけが分かる。

実際、木星の質量はこの方法で求められている。

答 (1) $\frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$ (2) 分からない

設定 3 ケプラーの法則を使う

3-1 比で解く

■(1) $T^2 \propto a^3$ より $T \propto a^{3/2}$

$$T_1 : T_2 = 1 : 4^{3/2} = 1 : 8$$

■(2) $9^{3/2} = 27 \rightarrow$ 27倍

$\frac{3}{2}$ 乗が全て。 a^3 の平方根と覚えてもよい。

答 (1) 1 : 8 (2) 27倍

3-2 $a = r$

■(1) 半径 r そのもの (円は2つの焦点が重なった楕円)。

■(2) 式を変形すると

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

右辺は中心天体で決まる定数で、回っているものによらない。

これがまさに第3法則の内容。

第3法則は万有引力の法則から導ける。

答 (1) 半径 r (2) $T^2/r^3 = 4\pi^2/GM$ が中心天体だけで決まる定数になる

3-3 近点で速い

■(1) 近点・遠点では速度が動径に垂直なので、

面積速度は $\frac{1}{2}rv$ と書ける

$$\frac{1}{2}r_1v_1 = \frac{1}{2}r_2v_2 \rightarrow r_1v_1 = r_2v_2$$

■(2) $v_2 = \frac{r_1v_1}{r_2}$

■(3) $r_1 < r_2$ なので近点のほうが速い。

この関係は近点・遠点でしか $\frac{1}{2}rv$ の形にならないので注意。

答 (1) $r_1v_1 = r_2v_2$ (2) $\frac{r_1v_1}{r_2}$ (3) 近点

3-4 2本立てる

■(1) $\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{r_2}$

■(2) $v_2 = \frac{r_1v_1}{r_2}$ を代入して整理

$$\frac{1}{2}v_1^2 \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) = GM \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2GMr_2}{r_1(r_1 + r_2)}}$$

楕円軌道は「面積速度＋エネルギー」の2本で解く。これが定石。

答 (2) $v_1 = \sqrt{\frac{2GMr_2}{r_1(r_1 + r_2)}}$

3-5 半長軸を求める

■(1) 近点 r_1 、遠点 r_2 の楕円なので、長軸は $r_1 + r_2$

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

■(2) $T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{(r_1 + r_2)^3}{8GM}}$

■(3) 近点から遠点までは半周

$$t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{(r_1 + r_2)^3}{8GM}}$$

実際の惑星間航行（ホーマン遷移）はこの計算そのもの。

答 (1) $\frac{r_1 + r_2}{2}$ (2) $2\pi\sqrt{\frac{(r_1 + r_2)^3}{8GM}}$ (3) その半分

設定 4 万有引力の位置エネルギー

4-1 なぜ負か

■(1) 無限遠 ($r \rightarrow \infty$ で $U = 0$)。

■(2) 無限遠から近づけると引力が仕事をする（＝エネルギーを放出する）ので、

有限の距離では基準より低い状態になるから。

■(3) 増える。 $-\frac{1}{r}$ は r とともに 0 に近づく（負のまま大きくなる）。

負だが「遠いほど大きい」のは mgh と同じ向きの変化。

答 (1) 無限遠 (2) 引力が仕事をした分だけ基準より低いから (3) 増える

4-2 合計0とおく

■(1) 無限遠でぎりぎり速さ0とすると

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = 0$$

■(2) $v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$

■(3) $GM = gR^2$ を代入

$$v_e = \sqrt{2gR}$$

第一宇宙速度 $\sqrt{gR}$ の $\sqrt{2}$ 倍。地球で約 11.2 km/s。

答 (2) $\sqrt{\frac{2GM}{R}}$ (3) $\sqrt{2gR}$

4-3 届かない場合

■(1) 最高点で速さ0

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{r}$$
$$\frac{GM}{r} = \frac{GM}{R} - \frac{v_0^2}{2}$$
$$r = \frac{2GMR}{2GM - Rv_0^2}$$

■(2) $h = r - R = \frac{Rv_0^2 \cdot R}{2GM - Rv_0^2}$

$v_0^2 \rightarrow \frac{2GM}{R}$ で分母が0、つまり $r \rightarrow \infty$ 。

脱出速度の意味がここに現れる。

答 (1) $\frac{2GMR}{2GM - Rv_0^2}$ (2) それから R を引いた値

4-4 近似の成り立ち

■(1) $\Delta U = GMm \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) = \frac{GMmh}{R(R+h)}$

■(2) $h \ll R$ なら $R+h \approx R$

$$\Delta U \approx \frac{GMmh}{R^2} = mgh$$

■(3) mgh は $-\frac{GMm}{r}$ の、地表付近での近似。

だから高度が数千 km になると mgh は使えない。

問題に G が出てきたら mgh を捨てるのが目安。

答 (2) mgh (3) mgh は地表付近での近似である

4-5 $-\frac{GMm}{2r}$

■(1) $v^2 = \frac{GM}{r}$ なので

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r}$$

■(2) $E = K + U = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r}$

■(3) 負なので、無限遠 ($E = 0$) まで行けない=束縛されている。

$E < 0$ なら楕円 (または円)、 $E = 0$ なら放物線、 $E > 0$ なら双曲線。

符号だけで軌道の形が決まる。

答 (1) $\frac{GMm}{2r}$ (2) $-\frac{GMm}{2r}$ (3) 負なので天体に束縛されている

設定 5 どの道具を使うか (総合)

5-1 問われている量で決める

■(1) 引力=向心力。円運動なので $\frac{v^2}{r}$ が使える。

■(2) ケプラー第3法則。比だけなので G 、 M を知らなくてよい。

■(3) エネルギー保存。距離が大きく変わるので mgh は使えず、

$$U = -\frac{GMm}{r} \text{ を使う。}$$

円ならつり合い系、動くならエネルギー系。

答 (1) 円運動の式 (2) ケプラー第3法則 (3) エネルギー保存

5-2 高さの大きさに決める

■(1) mgh 。 $h \ll R$ (地球半径 6400 km) なので近似が十分よい。

■(2) $-\frac{GMm}{r}$ 。

400 km は R の 6% 程度あり、 g が数%変わる。

■(3) $-\frac{GMm}{r}$ 。距離が R の 60 倍にもなる。

迷ったら $\frac{h}{R}$ を見る。

答 (1) mgh (2)(3) $-\frac{GMm}{r}$

5-3 エネルギーで比べる

■(1) $E_1 = -\frac{GMm}{2r_1}$ 、 $E_2 = -\frac{GMm}{2r_2}$

■(2) $\Delta E = \frac{GMm}{2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) > 0$

■(3) $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ なので減る。

エネルギーを与えたのに遅くなるという、直感に反する結果。

位置エネルギーが増えた分のほうが大きいから。

答 (2) $\frac{GMm}{2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$ (3) 減る

5-4 どちらも成り立つ

■第1：円は楕円の特別な場合（2つの焦点が重なっている）。

■第2：面積速度 $\frac{1}{2}rv$ で、 r も v も一定なので自動的に成り立つ。

等速で回るということ自体が第2法則の内容になっている。

■第3： $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$ で成り立つ。

円軌道は楕円軌道の話の特別な場合にすぎない。

答 すべて成り立つ（円は楕円の特別な場合）

5-5 3つを続けて使う

■(1) 円軌道 $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$

■(2) 近点 $r_1 = R$ 、遠点 $r_2 = 4R$ の楕円。設定3(4)の結果に代入

$$v_1 = \sqrt{\frac{2GM \cdot 4R}{R(R+4R)}} = \sqrt{\frac{8GM}{5R}}$$

■(3) 半長軸は $a = \frac{R+4R}{2} = \frac{5R}{2}$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{125R^3}{8GM}}$$

円運動→楕円のエネルギー→ケプラーと3つを順に使う典型。

答 (1) $\sqrt{\frac{GM}{R}}$ (2) $\sqrt{\frac{8GM}{5R}}$ (3) $2\pi\sqrt{\frac{125R^3}{8GM}}$