

SETUP DRILL 07

円運動 設定別ドリル

円を描く設定を6つに分けた。

手順はいつも同じ —— 中心向きを正にして、その向きの力を全部足し、 $m\frac{v^2}{r}$ とおく。

円運動には「向心力」という名前の力は存在しない。重力・張力・垂直抗力・摩擦のうち、中心を向いた成分の合計がその役をしているだけ。

使い方

1周目 設定の見出しと公式を読んだから5問続けて解く。

2周目 式を立てる前に「中心はどこか」「中心向きの力は何か」を書いてから始める。

3周目 見出しを隠して、円の中心と半径を言い当ててから解く。

重力加速度は g 。糸は軽く伸びないものとする。

1章

- ☐ 1周
- ☐ 2周
- ☐ 3周

2章

- ☐ 1周
- ☐ 2周
- ☐ 3周

3章

- ☐ 1周
- ☐ 2周
- ☐ 3周

4章

- ☐ 1周
- ☐ 2周
- ☐ 3周

5章

- ☐ 1周
- ☐ 2周
- ☐ 3周

6章

- ☐ 1周
- ☐ 2周
- ☐ 3周

問 題 編

解説は後半にまとめてある。先に見ないこと。

中心向きを正にそろえること。

SETUP 01

水平面内の等速円運動

記号の約束

r 円の半径 v 速さ ω 角速度 T 周期 m 質量

この設定を見分ける手がかり

1. 問題文に「一定の速さで円を描く」「毎秒 n 回転」
2. → 速さは変わらないので中心向きだけを考える
3. → 接線向きの式はいらない

この設定で使う公式

- 加速度は中心向きに $\frac{v^2}{r} = r\omega^2$
- 運動方程式: $m\frac{v^2}{r} = (\text{中心向きの力の合計})$
- $v = r\omega$ / $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{v}$

1-1 量の関係 ★

3周チェック ☐ ☐ ☐

半径 r の円周上を、質量 m の物体が速さ v で等速円運動している。

1. 角速度を求めよ。
2. 周期を求めよ。
3. 加速度の大きさと向きを求めよ。

1-2 糸で回す ★★3周チェック ☐ ☐ ☐

なめらかな水平面上で、質量 m の物体を長さ r の糸で結び、中心のまわりに速さ v で等速円運動させた。

1. 中心向きにはたらいっている力は何か。
2. 糸の張力を求めよ。
3. 速さを2倍にすると張力は何倍か。

1-3 回転数 ★★3周チェック ☐ ☐ ☐

半径 r の円周上を、質量 m の物体が毎秒 n 回まわっている。

1. 角速度を求めよ。
2. 速さを求めよ。
3. 必要な中心向きの力を求めよ。

1-4 糸が切れる ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

なめらかな水平面上で、質量 m の物体を長さ r の糸で回す。糸は張力が S_0 を超えると切れる。

1. 切れずに回せる最大の速さを求めよ。
2. 糸の長さを2倍にすると、最大の速さは何倍になるか。

1-5 2つの物体 ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

なめらかな水平面上で、中心から質量 m の物体 A を長さ r の糸でつなぎ、さらに A から質量 m の物体 B を長さ r の糸でつないで、全体を角速度 ω で回転させた。

1. A、B の回転半径をそれぞれ答えよ。
2. B につながる糸の張力を求めよ。
3. 中心と A をつなぐ糸の張力を求めよ。

SETUP 02

円錐振り子

記号の約束

θ 糸が鉛直となす角 L 糸の長さ S 糸の張力

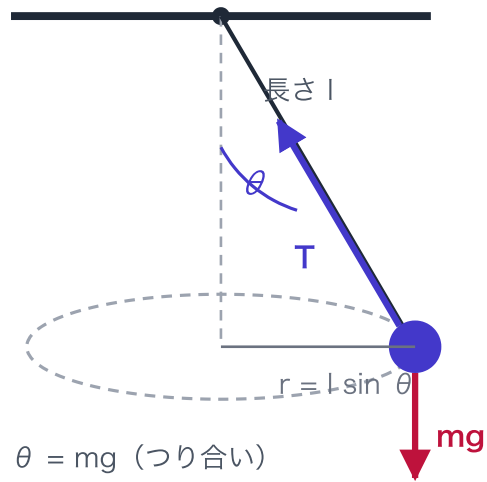
この設定を見分ける手がかり

1. 問題文に「糸が鉛直と角 θ 」「水平面内を回る」
2. → 張力は斜めなので、水平と鉛直に分ける
3. → 鉛直はつり合い、水平が円運動と役割が分かれる

この設定で使う公式

- 鉛直： $S \cos \theta = mg$ (つり合い)
- 水平： $S \sin \theta = m \frac{v^2}{r}$ (円運動)
- 半径は $r = L \sin \theta$ 。割り算して $\tan \theta = \frac{v^2}{rg}$

長さ L の糸に質量 m のおもりをつけ、糸が鉛直と角 θ を保ったまま水平面内で等速円運動させた。



鉛直 : $T \cos \theta = mg$ (つり合い)

水平 : $T \sin \theta = mv^2/r$ (円運動)

円錐振り子

1. 円の半径を求めよ。
2. 糸の張力を求めよ。

2-2 速さ ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

同じ円錐振り子について答えよ。

1. 水平方向の運動方程式を書け。
2. 速さを求めよ。

2-3 周期 ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

同じ円錐振り子の周期を考える。

1. 周期を L 、 θ 、 g で表せ。
2. θ を小さくすると周期は何に近づくか。

2-4 角度を求める ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

長さ L の糸につけたおもりを、角速度 ω で円錐振り子として回した。

1. $\cos \theta$ を L 、 ω 、 g で表せ。
2. この運動が成り立つための ω の条件を求めよ。

2-5 円板の上 ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

水平な円板の上、中心から距離 r の位置に質量 m の物体を置き、円板を角速度 ω で回した。物体と円板の間の静止摩擦係数は μ である。

1. 物体を円運動させている力は何か。
2. 滑らずに回り続ける条件を求めよ。

SETUP 03

鉛直面内の円運動

記号の約束

S 糸の張力（レールなら垂直抗力） v_{top} 最高点での速さ

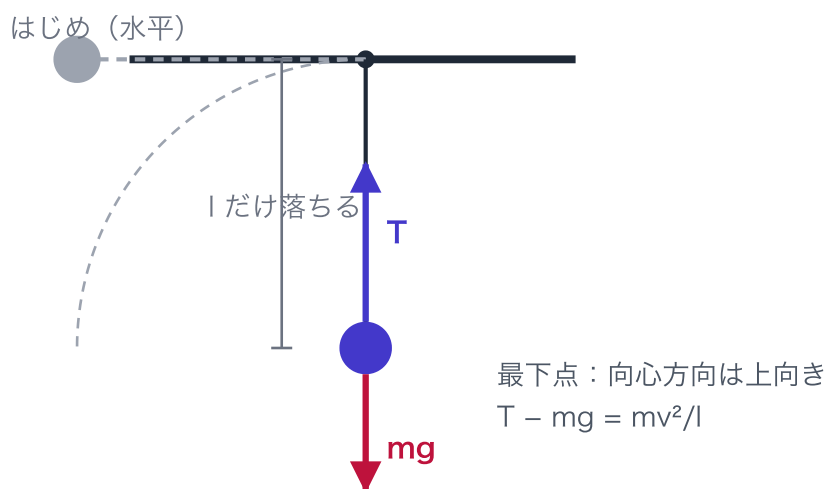
この設定を見分ける手がかり

1. 問題文に「鉛直面内」「ループ」「振り子が一回転」
2. → 速さが場所によって変わる
3. → 速さはエネルギー保存、力は円運動の式の2段階構え

この設定で使う公式

- 各点で $m\frac{v^2}{r} = (\text{中心向きの力の合計})$
- 最高点： $m\frac{v^2}{r} = mg + S$
- 一周する条件：最高点で $S \geq 0 \rightarrow v_{top} \geq \sqrt{gr}$

長さ L の糸につけた質量 m のおもりが、最下点を速さ v で通過している。



鉛直面内の振り子

1. 中心はどこか。中心向きはどちら向きか。
2. 糸の張力を求めよ。
3. 張力は mg より大きい小さいか。

3-2 最高点 ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

長さ L の糸につけた質量 m のおもりが、鉛直面内で円を描き、最高点を速さ v で通過した。

1. 最高点で中心向きにはたらく力をすべて挙げよ。
2. 糸の張力を求めよ。
3. 糸がたるまないための最小の速さを求めよ。

3-3 一周する条件 ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

長さ L の糸につけた質量 m のおもりを、最下点から速さ v_0 で打ち出す。

1. 最高点での速さを v_0 で表せ。
2. 一周するための v_0 の条件を求めよ。

3-4 棒の場合 ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

糸のかわりに、質量の無視できる軽い棒の先におもりをつけて鉛直面内で回す。

1. 最高点で必要な条件は何か。
2. 一周するための最下点での最小の速さを求めよ。
3. 糸の場合と違う理由を述べよ。

3-5 任意の点 ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

長さ L の糸につけた質量 m のおもりが、糸が鉛直下向きから角 θ の位置を速さ v で通過している。

1. 中心向きの重力の成分を求めよ。
2. 糸の張力を求めよ。
3. $\theta = 0$ 、 $\theta = 180^\circ$ で確かめよ。

SETUP 04

曲面に沿って動く（離れる条件）

記号の約束

N 面からの垂直抗力 θ 中心から測った角

この設定を見分ける手がかり

1. 問題文に「球面の頂上から滑り出す」「離れる点」
2. → 面は押すことしかできない
3. → 離れる境目は $N = 0$

この設定で使う公式

- 外側を通る： $m \frac{v^2}{r} = mg \cos \theta - N$
- 内側を通る： $m \frac{v^2}{r} = N - mg \cos \theta$
- 離れる条件： $N = 0$ において $\cos \theta$ を出す

4-1 外側 ★★★

3周チェック ☐ ☐ ☐

半径 r のなめらかな球面の頂上から、質量 m の物体を静かに滑らせた。中心から測って頂上から角 θ の位置を通過するときを考える。

1. その位置での速さを求めよ。
2. 垂直抗力を求めよ。
3. 球面から離れる位置を求めよ。

4-2 離れる高さ ★★3周チェック ☐ ☐ ☐

前問の続きとして答えよ。球の中心を基準に高さを測るものとする。

1. 離れる点は中心より何だけ高いか。
2. 頂上から何だけ下がった位置か。
3. 離れる瞬間の速さを求めよ。

4-3 内側 ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

半径 r のなめらかな円筒の**内側**を、質量 m の物体が鉛直面内で回っている。最高点での速さを v とする。

1. 最高点での垂直抗力を求めよ。
2. 一周するための条件を求めよ。
3. 糸の場合と同じか違うか。

4-4 谷底 ★★3周チェック ☐ ☐ ☐

半径 r のなめらかな曲面の谷底を、質量 m の物体が速さ v で通過している。

1. 垂直抗力を求めよ。
2. 体重計に乗っていたら、示す値は静止時より大きい小さいか。

4-5 ループ ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

なめらかな斜面の高さ h の点から質量 m の物体を静かに放し、続いて半径 r の鉛直円のループ（内側）を回らせる。

1. ループの最高点での速さを h で表せ。
2. 一周するための h の条件を求めよ。

SETUP 05

回転する立場から見る（遠心力）

記号の約束

F 遠心力 $m r \omega^2$

この設定を見分ける手がかり

1. 問題文に「回転する円板に乗った人から見ると」
2. → 回っている側から見ると物体は静止して見える
3. → 外向きに $m r \omega^2$ の遠心力を書き足して、つり合いの式にする

この設定で使う公式

- 遠心力：外向きに $m r \omega^2 = \frac{m v^2}{r}$
- 回転する立場ではつり合いの式になる
- 止まって見ている立場では遠心力を書いてはいけない

5-1 2つの立場 ★★

3周チェック ☐ ☐ ☐

なめらかな水平面上で、糸につけた質量 m の物体が半径 r 、速さ v で円運動している。

1. 床に立って見ている人の立てる式を書け。
2. いっしょに回っている人の立てる式を書け。
3. 2つの関係を述べよ。

5-2 円錐振り子で ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

円錐振り子（糸の長さ L 、鉛直となす角 θ 、質量 m 、角速度 ω ）を、おもりとっしょに回っている立場から考える。

1. おもりにはたらく3つの力を挙げよ。
2. 水平方向のつり合いから $\cos \theta$ を求めよ。

5-3 見かけの重さ ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

角速度 ω で回る円板の、中心から距離 r の位置に質量 m の物体が円板とともに回っている。回っている立場から見る。

1. 重力と遠心力の合力の大きさを求めよ。
2. その向きは鉛直から何度傾いているか（ $\tan$ で答えよ）。

5-4 やってはいけない ★★3周チェック ☐ ☐ ☐

床に立って見ている立場で、円運動している物体について

1. 「 $S - \frac{mv^2}{r} = m\frac{v^2}{r}$ 」と書いてよいか。理由を述べよ。
2. 正しい式を書け。

5-5 エレベーターと比較 ★★3周チェック ☐ ☐ ☐

加速度 a で上向きに加速するエレベーターの中の人（質量 m ）について答えよ。

1. エレベーターに乗っている立場で書き足す力を答えよ。
2. 床からの垂直抗力を求めよ。
3. 遠心力との共通点を述べよ。

SETUP 06

カーブを曲がる（摩擦・バンク）

記号の約束

μ 静止摩擦係数 θ バンクの角

この設定を見分ける手がかり

1. 問題文に「カーブ」「曲率半径 r 」「傾いた道路」
2. → 円運動の式に摩擦や斜面の分解が混ざる
3. → 中心は水平方向にあることに注意（鉛直はつり合い）

この設定で使う公式

- 水平な道： $m\frac{v^2}{r} \leq \mu mg \rightarrow v \leq \sqrt{\mu gr}$
- バンク（摩擦なし）： $\tan \theta = \frac{v^2}{rg}$
- 円錐振り子と同じ式

6-1 水平なカーブ ★★

3周チェック ☐ ☐ ☐

水平な道路の半径 r のカーブを、質量 m の車が速さ v で曲がる。タイヤと路面の静止摩擦係数を μ とする。

1. 曲がるのに必要な中心向きの力を求めよ。
2. 滑らずに曲がれる最大の速さを求めよ。

6-2 バンク ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

半径 r のカーブが、水平から角 θ だけ内側に傾いている（バンク）。路面はなめらか（摩擦なし）とし、質量 m の車が速さ v で曲がる。

1. 鉛直方向のつり合いの式を書け。
2. 水平方向の運動方程式を書け。
3. ちょうど曲がれる速さを求めよ。

6-3 角度を決める ★★3周チェック ☐ ☐ ☐

半径 r のカーブを、速さ v で摩擦に頼らずに曲がれるようにバンクをつけたい。

1. 必要な傾角を求めよ。
2. 半径を2倍にすると必要な $\tan \theta$ は何倍か。

6-4 バンク+摩擦 ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

傾角 θ のバンクで、摩擦もある（静止摩擦係数 μ ）場合を考える。

1. 設計速度より速く走ると、摩擦はどちら向きにはたらくか。
2. 遅く走るとどちら向きか。
3. 摩擦の役割を一言でまとめよ。

6-5 橋の上 ★★3周チェック ☐ ☐ ☐

半径 r の上に凸なアーチ橋の頂上を、質量 m の車が速さ v で通過する。

1. 路面からの垂直抗力を求めよ。
2. タイヤが浮く速さを求めよ。

解説編

各問の冒頭に円の中心と半径を書いてある。

設定 1 水平面内の等速円運動

1-1 つなぎ換えるだけ

■(1) $v = r\omega$ より $\omega = \frac{v}{r}$

■(2) $T = \frac{2\pi r}{v}$

■(3) 大きさ $\frac{v^2}{r}$ 、向きはつねに円の中心。

速さが一定でも向きが変わり続けているので加速度はある。

答 (1) $\frac{v}{r}$ (2) $\frac{2\pi r}{v}$ (3) $\frac{v^2}{r}$ 、中心向き

1-2 張力が中心向き

■(1) 糸の張力だけ。

重力は下向き、垂直抗力は上向きで、水平面内では打ち消し合う。

■(2) $m\frac{v^2}{r} = S \rightarrow S = \frac{mv^2}{r}$

■(3) v^2 に比例するので4倍。

速く回すほど糸が切れやすいのはこのため。

答 (1) 糸の張力 (2) $\frac{mv^2}{r}$ (3) 4倍

1-3 ω に直す

■(1) 1回転が 2π なので $\omega = 2\pi n$

■(2) $v = r\omega = 2\pi nr$

■(3) $F = mr\omega^2 = 4\pi^2 n^2 mr$

「毎秒何回転」と来たら $\omega = 2\pi n$ に直すのが定石。

答 (1) $2\pi n$ (2) $2\pi nr$ (3) $4\pi^2 n^2 mr$

1-4 上限から v を出す

■(1) $\frac{mv^2}{r} \leq S_0$
$$v \leq \sqrt{\frac{S_0 r}{m}}$$

■(2) $\sqrt{r}$ に比例するので $\sqrt{2}$ 倍。

長い糸のほうが速く回せる。半径が大きいほど曲がりがゆるいから。

答 (1) $\sqrt{\frac{S_0 r}{m}}$ (2) $\sqrt{2}$ 倍

1-5 同じ ω

同じ棒のように回るので角速度は共通。

■(1) A は r 、B は $2r$

■(2) B にはたらく中心向きの力は外側の糸の張力だけ

$$S_2 = m(2r)\omega^2 = 2mr\omega^2$$

■(3) A には内側の張力 S_1 (中心向き) と外側の張力 S_2 (外向き)

$$mr\omega^2 = S_1 - S_2$$

$$S_1 = mr\omega^2 + 2mr\omega^2 = 3mr\omega^2$$

内側の糸ほど大きい (設定3の連結体と同じ理屈)。

答 (1) r と $2r$ (2) $2mr\omega^2$ (3) $3mr\omega^2$

設定 2 円錐振り子

2-1 鉛直はつり合い

■(1) $r = L \sin \theta$

■(2) 鉛直方向は加速度0 (水平面内を回っているので上下しない)

$$S \cos \theta = mg \rightarrow S = \frac{mg}{\cos \theta}$$

θ が大きいほど張力は大きい。

答 (1) $L \sin \theta$ (2) $\frac{mg}{\cos \theta}$

2-2 水平が円運動

■(1) 中心向きの力は張力の水平成分だけ

$$m \frac{v^2}{r} = S \sin \theta$$

■(2) $S = \frac{mg}{\cos \theta}$ 、 $r = L \sin \theta$ を代入

$$m \frac{v^2}{L \sin \theta} = \frac{mg \sin \theta}{\cos \theta}$$

$$v = \sin \theta \sqrt{\frac{gL}{\cos \theta}}$$

鉛直で S を出してから水平に入れるのが手順。

答 $v = \sin \theta \sqrt{\frac{gL}{\cos \theta}}$

2-3 T で表す

■(1) $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi L \sin \theta}{\sin \theta \sqrt{gL/\cos \theta}}$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L \cos \theta}{g}}$$

■(2) $\cos \theta \rightarrow 1$ なので

$$T \rightarrow 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

これは単振り子の周期と同じ式。

浅く回すほど、小さく揺らす振り子に近づく。

答 (1) $2\pi \sqrt{\frac{L \cos \theta}{g}}$ (2) 単振り子の周期 $2\pi \sqrt{L/g}$

2-4 逆に問われる

■(1) 水平 : $m(L \sin \theta)\omega^2 = S \sin \theta \rightarrow S = mL\omega^2$

鉛直 : $S \cos \theta = mg$

$$\cos \theta = \frac{g}{L\omega^2}$$

■(2) $\cos \theta \leq 1$ でなければならないので

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{L}}$$

ゆっくりでは持ち上がらない。この角速度が持ち上がり始める境目。

答 (1) $\frac{g}{L\omega^2}$ (2) $\omega \geq \sqrt{g/L}$

2-5 摩擦が向心力

■(1) 静止摩擦力。中心向きにはたらくしている。

■(2) 必要な力は $m\omega^2 r$ 、上限は μmg

$$m\omega^2 r \leq \mu mg$$

$$\omega \leq \sqrt{\frac{\mu g}{r}}$$

外側に置くほど飛ばされやすい。

「向心力」という力があるのではなく、摩擦がその役をしている。

答 (1) 静止摩擦力 (2) $\omega \leq \sqrt{\mu g/r}$

設定 3 鉛直面内の円運動

3-1 張力は重力より大

■(1) 中心は糸をつけた支点、中心向きは上向き。

■(2) 上向きを正とすると、張力 S が上、重力 mg が下

$$m \frac{v^2}{L} = S - mg$$

$$S = mg + \frac{mv^2}{L}$$

■(3) 大きい。ただ吊るしているより余分に必要。

答 (1) 支点・上向き (2) $mg + \frac{mv^2}{L}$ (3) 大きい

3-2 重力も中心向き

■(1) 最高点では中心が真下にあるので、

重力 mg と張力 S の両方が中心向き。

$$\text{■(2)} \quad m \frac{v^2}{L} = mg + S$$

$$S = \frac{mv^2}{L} - mg$$

■(3) 糸は引くことしかできないので $S \geq 0$

$$v \geq \sqrt{gL}$$

最下点と最高点で式の形が変わるのがこの山場。

答 (1) 重力と張力 (2) $\frac{mv^2}{L} - mg$ (3) $\sqrt{gL}$

3-3 2段構え

■(1) 最高点は最下点より $2L$ 高い。エネルギー保存

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mg(2L)$$

$$v = \sqrt{v_0^2 - 4gL}$$

■(2) 最高点で $v \geq \sqrt{gL}$ が必要

$$v_0^2 - 4gL \geq gL$$

$$v_0 \geq \sqrt{5gL}$$

$\sqrt{5gL}$ は覚えておく価値がある。

答 (1) $\sqrt{v_0^2 - 4gL}$ (2) $v_0 \geq \sqrt{5gL}$

3-4 押せるかどうか

■(1) 棒は押すこともできるので $S < 0$ でもよい。

必要なのは最高점에達することだけ、つまり $v \geq 0$ 。

$$\text{■(2)} \quad \frac{1}{2}mv_0^2 = mg(2L)$$

$$v_0 \geq 2\sqrt{gL}$$

■(3) 糸は引く力しか出せないが、棒は支える（押す）こともできるから。

$2\sqrt{gL} = \sqrt{4gL} < \sqrt{5gL}$ で、棒のほうが楽。

答 (1) $v \geq 0$ (2) $2\sqrt{gL}$ (3) 棒は押す力も出せるから

3-5 角度で書く

■(1) 重力は鉛直下向き。中心（支点）向きは糸に沿って上向き。

中心向きの成分は $-mg \cos \theta$ (θ が小さいうちは逆向き)

$$\text{■(2)} \quad m \frac{v^2}{L} = S - mg \cos \theta$$

$$S = \frac{mv^2}{L} + mg \cos \theta$$

$$\text{■(3)} \quad \theta = 0 : S = \frac{mv^2}{L} + mg \text{ (最下点の式に一致)}$$

$$\theta = 180^\circ : S = \frac{mv^2}{L} - mg \text{ (最高点の式に一致)}$$

1本の式が両方を含んでいる。

答 (1) $-mg \cos \theta$ (2) $\frac{mv^2}{L} + mg \cos \theta$ (3) 最下点・最高点の式に一致

設定 4 曲面に沿って動く（離れる条件）

4-1 $N = 0$ で離れる

■(1) 高さは $r - r \cos \theta$ 下がっている。エネルギー保存

$$v = \sqrt{2gr(1 - \cos \theta)}$$

■(2) 中心向き（球の中心=内向き）を正とすると、

重力の成分 $mg \cos \theta$ が内向き、垂直抗力 N が外向き

$$m \frac{v^2}{r} = mg \cos \theta - N$$

$$N = mg \cos \theta - \frac{mv^2}{r} = mg(3 \cos \theta - 2)$$

$$\text{■(3)} \quad N = 0 \rightarrow \cos \theta = \frac{2}{3}$$

質量にも r にもよらないという有名な結果。

答 (1) $\sqrt{2gr(1 - \cos \theta)}$ (2) $mg(3 \cos \theta - 2)$ (3) $\cos \theta = \frac{2}{3}$

4-2 $\cos$ から高さへ

■(1) 中心からの高さは $r \cos \theta$ 。 $\cos \theta = \frac{2}{3}$ なので

$$\frac{2r}{3}$$

■(2) 頂上は中心から r の高さなので

$$r - \frac{2r}{3} = \frac{r}{3}$$

$$\text{■(3)} \quad v = \sqrt{2gr \left(1 - \frac{2}{3}\right)} = \sqrt{\frac{2gr}{3}}$$

半径の $\frac{1}{3}$ だけ下がったところで離れると覚えられる。

答 (1) $\frac{2r}{3}$ (2) $\frac{r}{3}$ (3) $\sqrt{\frac{2gr}{3}}$

4-3 符号が逆になる

■(1) 最高点では中心が真下。重力も垂直抗力も中心向き

$$m \frac{v^2}{r} = mg + N \rightarrow N = \frac{mv^2}{r} - mg$$

■(2) 面は引けないので $N \geq 0$

$$v \geq \sqrt{gr}$$

■(3) 糸の場合とまったく同じ。

どちらも「引けない／押せない」という制約が ≥ 0 の形で効いている。

答 (1) $\frac{mv^2}{r} - mg$ (2) $v \geq \sqrt{gr}$ (3) 糸と同じ

4-4 最下点は足し算

■(1) 谷底では中心は真上

$$m \frac{v^2}{r} = N - mg \rightarrow N = mg + \frac{mv^2}{r}$$

■(2) 大きい。

ジェットコースターの谷で体が重く感じるのはこれ。

山の頂上では逆に $N = mg - \frac{mv^2}{r}$ で軽く感じる。

答 (1) $mg + \frac{mv^2}{r}$ (2) 大きい

4-5 高さから逆算

■(1) 最高点の高さは $2r$ 。エネルギー保存

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mg(2r)$$

$$v = \sqrt{2g(h - 2r)}$$

■(2) $v \geq \sqrt{gr}$ が必要

$$2g(h - 2r) \geq gr \rightarrow h \geq \frac{5r}{2}$$

ループの高さ $2r$ より高く上げるだけでは足りない。

頂上でも曲がり続ける速さが要するため。

答 (1) $\sqrt{2g(h - 2r)}$ (2) $h \geq \frac{5r}{2}$

設定 5 回転する立場から見る (遠心力)

5-1 式は同じ中身

■(1) 円運動の運動方程式

$$m \frac{v^2}{r} = S$$

■(2) 物体は静止して見えるのでつり合いの式

$$S - \frac{mv^2}{r} = 0 \quad (\text{張力が内向き、遠心力が外向き})$$

■(3) 移項しただけで中身は同じ。

どちらで解いても答えは変わらない。混ぜて二重に書くのが最悪。

$$\text{答} \quad (1) m \frac{v^2}{r} = S \quad (2) S - \frac{mv^2}{r} = 0 \quad (3) \text{移項しただけで同じ}$$

5-2 つり合いで解く

■(1) 重力 mg (下)、張力 S (糸に沿って上)、

遠心力 $m(L \sin \theta)\omega^2$ (水平外向き) の3つ。

$$\text{■(2) 水平: } S \sin \theta = m L \sin \theta \omega^2 \rightarrow S = m L \omega^2$$

$$\text{鉛直: } S \cos \theta = mg$$

$$\cos \theta = \frac{g}{L \omega^2}$$

設定2で運動方程式から出した答えと一致する。

$$\text{答} \quad (1) \text{重力} \cdot \text{張力} \cdot \text{遠心力} \quad (2) \frac{g}{L \omega^2}$$

5-3 合力で考える

■(1) 重力は下向き mg 、遠心力は水平外向き $mr\omega^2$ 。直交するので

$$\sqrt{(mg)^2 + (mr\omega^2)^2} = m\sqrt{g^2 + r^2\omega^4}$$

$$\text{■(2) } \tan \alpha = \frac{r\omega^2}{g} \quad (\text{鉛直から外向きに})$$

水面を回転させるとこの向きに垂直な面ができる。

だから回転する容器の水面はへこむ。

$$\text{答} \quad (1) m\sqrt{g^2 + r^2\omega^4} \quad (2) \tan \alpha = \frac{r\omega^2}{g}$$

5-4 二重に書かない

■(1) いけない。

左辺で遠心力を引き、右辺でも $m\frac{v^2}{r}$ を置いていて、
同じものを二重に数えている。

遠心力は回転する立場でだけ書き足す力。

■(2) 床の立場： $m\frac{v^2}{r} = S$

回転する立場： $S - \frac{mv^2}{r} = 0$

どちらか一方に決めてから書き始める。

答 (1) 二重計上になるのでいけない (2) $m\frac{v^2}{r} = S$ または $S - \frac{mv^2}{r} = 0$

5-5 慣性力の仲間

■(1) 下向きに ma の慣性力。

■(2) つり合いとして $N - mg - ma = 0 \rightarrow N = m(g + a)$

■(3) どちらも加速している立場から見たときだけ現れる力。

遠心力は「向きが変わる加速」に対応する慣性力。

止まっている立場から見れば、どちらも存在しない。

答 (1) 下向きに ma (2) $m(g + a)$ (3) どちらも加速する立場でだけ現れる慣性力

設定 6 カーブを曲がる (摩擦・バンク)

6-1 摩擦が中心向き

■(1) $\frac{mv^2}{r}$

■(2) この役をするのは静止摩擦力で、上限は μmg

$$\frac{mv^2}{r} \leq \mu mg$$

$$v \leq \sqrt{\mu gr}$$

質量によらない。雨で μ が下がると曲がれる速さが落ちる。

答 (1) $\frac{mv^2}{r}$ (2) $\sqrt{\mu gr}$

6-2 垂直抗力を分解

垂直抗力 N は路面に垂直（内向きに傾いている）。

■(1) $N \cos \theta = mg$

■(2) 中心向きは水平内向き

$$m \frac{v^2}{r} = N \sin \theta$$

■(3) 割り算して $\tan \theta = \frac{v^2}{rg}$

$$v = \sqrt{gr \tan \theta}$$

円錐振り子とまったく同じ式。糸の張力が垂直抗力に変わっただけ。

答 (1) $N \cos \theta = mg$ (2) $m \frac{v^2}{r} = N \sin \theta$ (3) $\sqrt{gr \tan \theta}$

6-3 設計の問題

■(1) $\tan \theta = \frac{v^2}{rg} \rightarrow \theta = \arctan \frac{v^2}{rg}$

■(2) $\frac{1}{r}$ に比例するので $\frac{1}{2}$ 倍。

大きく緩やかなカーブほど、傾きは小さくてよい。

答 (1) $\tan \theta = \frac{v^2}{rg}$ (2) $1/2$ 倍

6-4 上限と下限

■(1) 中心向きの力が足りないので、摩擦は斜面に沿って下向き（内向き）。

■(2) 中心向きが多すぎるので、摩擦は斜面に沿って上向き（外向き）。

内側に滑り落ちようとするのを止めている。

■(3) 摩擦は設計速度からのずれを吸収して、幅を持たせている。

だから実際のカーブは、ある速さの範囲で安全に曲がれる。

答 (1) 斜面向下向き (2) 斜面上向き (3) 設計速度からのずれを吸収する

6-5 上に凸のカーブ

■(1) 中心は真下にあるので、中心向きを下向きに取る

$$m\frac{v^2}{r} = mg - N \rightarrow N = mg - \frac{mv^2}{r}$$

■(2) $N = 0$ において

$$v = \sqrt{gr}$$

設定4の「球面から離れる」「ループの最高点」と同じ $N = 0$ の判定。

円運動の「離れる」はすべてこれ。

答 (1) $mg - \frac{mv^2}{r}$ (2) $\sqrt{gr}$