

[illegible]

# 問 題 編

解説は後半にまとめてある。先に見ないこと。

正の向きを先に決めること。

## SETUP 01

# 力積を求める（1つの物体）

### 記号の約束

$p$  運動量  $\$mv\$$   $I$  力積  $\$Ft\$$   $\Delta p$  運動量の変化

### この設定を見分ける手がかり

1. 問題文に「壁に当てて」「バットで打ち返して」+力を受けた時間
2. → 物体は1つ。保存ではなく変化を見る
3. → 向きが変わる場合、必ず符号を書く（引き算で+になる）

### この設定で使う公式

- $I = \Delta p = mv' - mv$
- $I = Ft$  ( $F$  が一定のとき) /  $F$  が変化するなら  $F-t$  グラフの面積
- はね返り:  $mv' - mv = m(-v') - mv$  のように符号が逆になる

### 1-1 はね返る ★★

3周チェック ☐ ☐ ☐

質量  $m$  の球が速さ  $v$  で壁に垂直に当たり、速さ  $v'$  で反対向きにはね返った。

1. 球が受けた力積の大きさと向きを求めよ。
2.  $v' = v$  のとき、力積の大きさを求めよ。

**1-2 平均の力 ★★**3周チェック ☐ ☐ ☐

質量  $m$  の球が速さ  $v$  で壁に垂直に当たり、同じ速さではね返った。接触していた時間は  $t$  であった。

1. 壁から受けた平均の力を求めよ。
2. 接触時間が2倍になると平均の力はどうなるか。

**1-3 グラフ ★★★**3周チェック ☐ ☐ ☐

静止していた質量  $m$  の物体に力を加えた。力の大きさは時間  $0$  から  $t_0$  まで  $0$  から  $F_0$  まで一定の割合で増え、 $t_0$  から  $2t_0$  まで  $F_0$  のまま一定であった。

1. 時刻  $2t_0$  までに与えられた力積を求めよ。
2. そのときの速さを求めよ。

**1-4** 落下 ★★3周チェック ☐ ☐ ☐

質量  $m$  の物体を静かに落とし、時間  $t$  後の速さを考える。

1. この間に重力が与えた力積を求めよ。
2. そのときの速さを求めよ。
3.  $v = gt$  と一致することを確認めよ。

**1-5** 斜めに当たる ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

質量  $m$  の球が、なめらかな壁に速さ  $v$  で入射角  $\theta$ （壁に垂直な方向からの角）で当たり、同じ速さで反射角  $\theta$  ではね返った。

1. 壁に平行な向きの運動量は変化するか。
2. 壁に垂直な向きの運動量の変化を求めよ。
3. 受けた力積の大きさを求めよ。

## SETUP 02

# 一直線上の衝突（運動量保存）

### 記号の約束

$m_1, m_2$  2物体の質量     $v_1, v_2$  衝突前の速度     $v'_1, v'_2$  衝突後の速度

### この設定を見分ける手がかり

1. 問題文に「衝突した」「一直線上を」+2物体の前後の速度
2. → 外力がない（またはごく短時間）ので運動量の合計は変わらない
3. → 速度には必ず符号。左向きは負

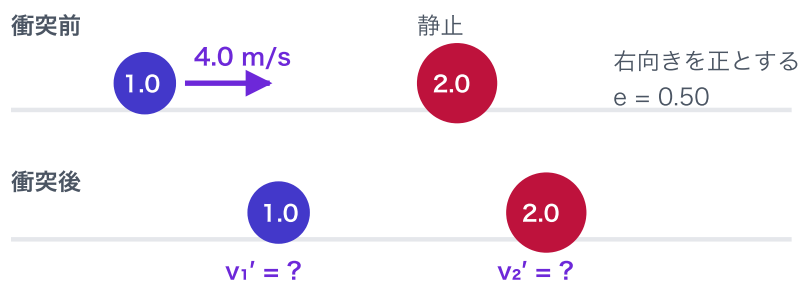
### この設定で使う公式

- $m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2$
- 未知数が2つなら反発係数の式をもう1本足す
- 力学的エネルギーは保存するとは限らない

2-1 一方が静止 ★★

3周チェック ☐ ☐ ☐

なめらかな水平面上を、質量  $m_1$  の物体が速さ  $v$  で右向きに動き、静止していた質量  $m_2$  の物体に衝突した。衝突後、 $m_1$  は速さ  $v_1'$  で右向き、 $m_2$  は速さ  $v_2'$  で右向きに動いた。



一直線上の衝突

1. 運動量保存の式を書け。
2.  $v_2'$  を  $v$ 、 $v_1'$ 、質量で表せ。

2-2 向かい合う ★★

3周チェック ☐ ☐ ☐

なめらかな水平面上で、質量  $m$  の物体 A が右向きに速さ  $2v$ 、質量  $2m$  の物体 B が左向きに速さ  $v$  で進み、正面衝突して一体となった。

1. 衝突前の運動量の合計を求めよ。
2. 一体となったあとの速度を求めよ。

**2-3 エネルギー ★★★**3周チェック ☐ ☐ ☐

なめらかな水平面上で、速さ  $v$  で動く質量  $m$  の物体が、静止した質量  $m$  の物体に衝突し、一体となって動き出した。

1. 合体後の速度を求めよ。
2. 衝突前後の運動エネルギーをそれぞれ求めよ。
3. 失われたエネルギーの割合を求めよ。

**2-4 弾性衝突 ★★★**3周チェック ☐ ☐ ☐

なめらかな水平面上を速さ  $v$  で動く質量  $m$  の物体が、静止した質量  $m$  の物体に弾性衝突した（反発係数  $e = 1$ ）。

1. 運動量保存と反発係数の式を書け。
2. 衝突後の2つの速度を求めよ。

質量  $m$  の物体が速さ  $v$  で、静止した質量  $M$  の物体に弾性衝突した。衝突後の速度はそれぞれ  $v'_1 = \frac{(m-M)v}{m+M}$ 、 $v'_2 = \frac{2mv}{m+M}$  となる。

1.  $M \gg m$  (壁のように重い) のとき  $v'_1$ 、 $v'_2$  はどうなるか。
2.  $M \ll m$  (ごく軽い) のときはどうか。
3. (1) は何と同じ状況か。

## SETUP 03

# 反発係数を使う

### 記号の約束

$e$  反発係数（はね返り係数）

### この設定を見分ける手がかり

1. 問題文に「反発係数  $e$ 」「はね返り係数」
2. → 運動量保存だけでは未知数2つに式1本で足りない
3. → もう1本の式として使う

### この設定で使う公式

- $e = -\frac{v'_1 - v'_2}{v_1 - v_2}$ （相対速度の比）
- 床との衝突： $e = \frac{v'}{v}$ （大きさの比）
- $e = 1$  弾性（エネルギー保存）／ $e = 0$  完全非弾性（合体）

### 3-1 式の形 ★

3周チェック ☐ ☐ ☐

一直線上で、速度  $v_1$  の物体と速度  $v_2$  の物体が衝突し、それぞれ  $v'_1$ 、 $v'_2$  になった。

1. 反発係数の定義式を書け。
2.  $e = 0$  のとき何が言えるか。

**3-2** 2式連立 ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

なめらかな水平面上を速さ  $v$  で動く質量  $m$  の物体が、静止した質量  $m$  の物体に反発係数  $e$  で衝突した。

1. 2本の式を書け。
2. 衝突後の2つの速度を求めよ。

**3-3** 床 ★★3周チェック ☐ ☐ ☐

高さ  $h$  から静かに落とした球が床ではね返り、高さ  $h'$  まで上がった。

1. 床に当たる直前の速さを求めよ。
2. はね返った直後の速さを求めよ。
3. 反発係数を  $h$ 、 $h'$  で表せ。

**3-4** 何回もはずむ ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

高さ  $h$  から落とした球が、反発係数  $e$  で床とくり返し衝突する。

1. 1回目にはね返る高さを求めよ。
2.  $n$  回目にはね返る高さを求めよ。
3.  $n$  回目の衝突直後の速さを求めよ。

**3-5** 横に投げる ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

なめらかな床に、球が速さ  $v$ 、水平と角  $\theta$  をなす向きで斜めに当たり、反発係数  $e$  ではね返った。

1. はね返った直後の水平成分と鉛直成分を求めよ。
2. はね返る角は入射角より大きい小さいか。

## SETUP 04

# 分裂・反動（もともと1つ）

### 記号の約束

$V$  合体後の速度  $M$  合体後の質量

### この設定を見分ける手がかり

1. 問題文に「分裂した」「打ち出した」「飛び降りた」
2. → はじめが1つでも運動量保存はそのまま使える
3. → はじめ静止なら合計は0のまま

### この設定で使う公式

- $0 = m_1v'_1 + m_2v'_2$  → 向きは必ず逆
- 速さの比は質量の逆比： $m_1v'_1 = m_2v'_2$
- エネルギーは増える（火薬・ばね・筋肉から供給される）

## 4-1 分裂 ★★

3周チェック ☐ ☐ ☐

なめらかな水平面上で静止していた質量  $M$  の物体が、内部のばねによって質量  $m_1$  と  $m_2$  ( $m_1 + m_2 = M$ ) の2つに分裂した。 $m_1$  は速さ  $v_1$  で左に動いた。

1.  $m_2$  の速度を求めよ。
2. 2つの速さの比を求めよ。

**4-2 エネルギー ★★★**3周チェック ☐ ☐ ☐

静止していた質量  $2m$  の物体が、質量  $m$  の2つに分裂し、それぞれ速さ  $v$  で反対向きに飛んだ。

1. 運動量の合計を分裂前後で比べよ。
2. 運動エネルギーを分裂前後で比べよ。
3. エネルギーはどこから来たか。

**4-3 台と人 ★★★**3周チェック ☐ ☐ ☐

なめらかな水平面上に置かれた質量  $M$  の台の上に、質量  $m$  の人が乗って静止している。人が台に対して水平に速さ  $u$  で歩き出した（地面に対する台の速度を  $V$  とする）。

1. 人の地面に対する速度を  $u$ 、 $V$  で表せ。
2.  $V$  を求めよ。

**4-4** 打ち出す ★★3周チェック ☐ ☐ ☐

なめらかな水平面上で静止している質量  $M$  の砲台から、質量  $m$  の弾を水平方向に地面に対する速さ  $v$  で打ち出した。

1. 砲台の速度を求めよ。
2.  $M \gg m$  のとき砲台の速さはどうなるか。

**4-5** 飛び乗る ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

なめらかなレール上を速さ  $v$  で走っている質量  $M$  の台車に、静止していた質量  $m$  の人が真上から飛び乗った。

1. 飛び乗ったあとの速度を求めよ。
2. 人が水平方向に速さ  $u$  (台車と同じ向き) で走りながら飛び乗るとどうなるか。

## SETUP 05

# 衝突とエネルギーを組み合わせる

### 記号の約束

$h$  落とした高さ  $h'$  はね返った高さ

### この設定を見分ける手がかり

1. 問題文に**衝突のあとに斜面・ばね・振り子**が続く
2. → **衝突の瞬間だけ運動量**、その前後は**エネルギー**
3. → 使い分けの境目は「**ぶつかった瞬間**」

### この設定で使う公式

- 衝突前：エネルギーで速さを出す
- 衝突：**運動量保存**（+反発係数）
- 衝突後：エネルギーで高さ・距離を出す

## 5-1 振り子に当てる ★★★

3周チェック ☐ ☐ ☐

長さ  $L$  の糸で吊るした質量  $M$  のおもりが静止している。そこへ質量  $m$  の弾丸が水平に速さ  $v$  で当たり、めり込んで一体となった。

1. 一体となった直後の速さを求めよ。
2. おもりが振れ上がる高さを求めよ。
3. 糸が鉛直となす最大の角を  $\cos$  で表せ。

**5-2** ばねに当てる ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

なめらかな水平面上で、速さ  $v$  で動く質量  $m$  の物体が、ばね定数  $k$  のばねをつけた質量  $M$  の物体に近づき、ばねを押し縮めた。

1. ばねの縮みが最大になるのはどんなときか。
2. そのときの共通の速度を求めよ。
3. ばねの最大の縮みを求めよ。

**5-3** 斜面に上げる ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

なめらかな水平面上で、速さ  $v$  の質量  $m$  の物体が静止した質量  $m$  の物体に弾性衝突し、当てられた物体がなめらかな斜面を上った。

1. 衝突直後の2つの速度を書け。
2. 斜面を上る最高の高さを求めよ。

**5-4** 落として当てる ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

高さ  $h$  から質量  $m$  の物体を静かに落とし、床の上に置かれた質量  $M$  の物体に当てて一体となった。床はなめらかではないが、衝突は一瞬とする。

1. 当たる直前の速さを求めよ。
2. 一体となった直後の速さを求めよ。

**5-5** どちらを使うか ★★3周チェック ☐ ☐ ☐

次の場面で、運動量保存とエネルギー保存のどちらを使うか答えよ。

1. なめらかな斜面を滑り降りる。
2. 2つの粘土玉がぶつかってくっつく。
3. バネで押し出されて2つに分かれる。

## SETUP 06

# 2次元の衝突（成分に分ける）

### 記号の約束

$\theta$  速度が水平となす角

### この設定を見分ける手がかり

1. 問題文に「斜めに飛び出した」「角をなして」
2. → 運動量はベクトルなので、 $x$  と  $y$  で2本立てる
3. → はじめの向きを  $x$  軸にとると  $y$  方向が0になって楽

### この設定で使う公式

- $x : m_1 v_1 = m_1 v'_1 \cos \alpha + m_2 v'_2 \cos \beta$
- $y : 0 = m_1 v'_1 \sin \alpha - m_2 v'_2 \sin \beta$
- 2本を連立して未知数2つを出す

## 6-1 分解 ★★

3周チェック ☐ ☐ ☐

静止している質量  $M$  の物体に、質量  $m$  の物体が速さ  $v$  で衝突し、衝突後は  $m$  が元の向きから角  $\alpha$ 、 $M$  が反対側に角  $\beta$  の向きに飛んだ。

1.  $x$  軸をどう取るのが便利か。
2.  $y$  方向の運動量保存の式を書け。

**6-2** 連立 ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

静止した質量  $m$  の物体に、同じ質量  $m$  の物体が速さ  $v$  で衝突した。衝突後、一方は元の向きから角  $30^\circ$ 、他方は反対側に角  $60^\circ$  の向きに飛んだ。

1.  $x$ 、 $y$  方向の式を書け。
2. 衝突後の2つの速さを求めよ。

**6-3** 直角 ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

前問について答えよ。

1. 2つの飛び出す向きのなす角を求めよ。
2. 運動エネルギーは保存しているか確かめよ。
3. この2つの結果の関係を述べよ。

**6-4** 合体 ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

なめらかな水平面上を、質量  $m$  の物体が東向きに速さ  $v$ 、質量  $m$  の物体が北向きに速さ  $v$  で進み、衝突して一体となった。

1. 合体後の速さを求めよ。
2. 進む向きを答えよ。

**6-5** 斜め衝突 ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

なめらかな水平面上で、質量  $m$  の物体が東向きに速さ  $2v$ 、質量  $2m$  の物体が北向きに速さ  $v$  で進み、衝突して一体となった。

1. 合体後の速度の東向き成分と北向き成分を求めよ。
2. 速さを求めよ。

# 解説編

各問の冒頭にどちらを正にしたかを書いてある。

## 設定 1 力積を求める (1つの物体)

### 1-1 符号で足し算になる

はじめの進む向きを正とする。衝突後の速度は  $-v'$ 。

$$\blacksquare(1) I = m(-v') - mv = -m(v + v')$$

大きさ  $m(v + v')$ 、向きははじめの運動と逆向き。

$$\blacksquare(2) I = 2mv$$

止めるだけなら  $mv$ 、はね返すとその2倍。

壁が受ける力積はこの逆向きで同じ大きさ (作用・反作用)。

答 (1) 大きさ  $m(v + v')$ 、はじめと逆向き (2)  $2mv$

### 1-2 $I = Ft$ で割る

$$\blacksquare(1) Ft = 2mv \rightarrow F = \frac{2mv}{t}$$

$\blacksquare(2)$  半分になる。

運動量の変化は同じなので、時間を長くすれば力は小さくてすむ。

受け身・エアバッグ・クッションはすべて  $t$  を伸ばして  $F$  を下げている。

答 (1)  $\frac{2mv}{t}$  (2) 半分になる

### 1-3 面積が力積

■(1)  $F$ - $t$  グラフの面積が力積。

前半は三角形  $\frac{1}{2}F_0t_0$ 、後半は長方形  $F_0t_0$

$$I = \frac{1}{2}F_0t_0 + F_0t_0 = \frac{3}{2}F_0t_0$$

■(2)  $mv - 0 = I$

$$v = \frac{3F_0t_0}{2m}$$

力が変化しても、面積を読めば運動量が出せる。

答 (1)  $\frac{3}{2}F_0t_0$  (2)  $\frac{3F_0t_0}{2m}$

### 1-4 重力の力積

■(1) 重力  $mg$  が時間  $t$  だけはたらく

$$I = mgt \text{ (下向き)}$$

■(2)  $mv - 0 = mgt \rightarrow v = gt$

■(3) 自由落下の公式と一致する。

運動量と力積の関係は運動方程式を時間で足し合わせたもの。

力が一定なら等加速度の公式と同じことを言っている。

答 (1)  $mgt$  (下向き) (2)  $gt$  (3) 一致する

### 1-5 成分に分ける

■(1) 変化しない。なめらかな壁は平行な向きに力を及ぼさないから。

■(2) 垂直成分は  $v \cos \theta$  が  $-v \cos \theta$  になる

$$\Delta p = -2mv \cos \theta$$

■(3) 平行成分は変化なしなので、力積は垂直成分だけ

$$|I| = 2mv \cos \theta \text{ (壁に垂直な向き)}$$

$\theta = 0$  (正面衝突) なら  $2mv$  に戻る。

答 (1) 変化しない (2)  $-2mv \cos \theta$  (3)  $2mv \cos \theta$

## 設定 2 一直線上の衝突 (運動量保存)

### 2-1 符号をつけて代入

右向きを正とする。

$$\blacksquare(1) \quad m_1 v + 0 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

$$\blacksquare(2) \quad v'_2 = \frac{m_1(v - v'_1)}{m_2}$$

失った分がそのまま相手に渡るとい形になっている。

$$\text{答 (2)} \quad \frac{m_1(v - v'_1)}{m_2}$$

### 2-2 片方が負

右向きを正。B の速度は  $-v$ 。

$$\blacksquare(1) \quad m(2v) + 2m(-v) = 0$$

$$\blacksquare(2) \quad 0 = 3mV \rightarrow V = 0$$

止まる。

運動量の合計が0だったので、一体になったら静止する。

このとき運動エネルギーは全部失われている（保存しない）。

$$\text{答 (1) } 0 \quad (2) \quad V = 0 \text{ (静止する)}$$

### 2-3 保存するか調べる

$$\blacksquare(1) \quad mv = 2mV \rightarrow V = \frac{v}{2}$$

$$\blacksquare(2) \text{ 前: } \frac{1}{2}mv^2$$

$$\text{後: } \frac{1}{2}(2m)\left(\frac{v}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}mv^2$$

$$\blacksquare(3) \text{ 失われたのは } \frac{1}{4}mv^2 \text{ で、割合は } \frac{1}{2} \text{ (50\%)}$$

運動量は保存するがエネルギーは保存しない。

この2つを混同しないこと。

$$\text{答 (1) } \frac{v}{2} \quad (2) \quad \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow \frac{1}{4}mv^2 \quad (3) \text{ 半分}$$

## 2-4 2本立てで解く

右向きを正、衝突後を  $v'_1$ 、 $v'_2$  とする。

$$\blacksquare(1) \quad mv = mv'_1 + mv'_2 \quad \cdots \cdots ①$$

$$1 = -\frac{v'_1 - v'_2}{v - 0} \rightarrow v'_2 - v'_1 = v \quad \cdots \cdots ②$$

**■(2) ①より  $v'_1 + v'_2 = v$ 。②と連立して**

$$v'_1 = 0, \quad v'_2 = v$$

速度がそっくり入れ替わる。同じ質量の弾性衝突の特徴。

ビリヤードで手玉が止まるのはこれ。

**答**  $v'_1 = 0$ 、 $v'_2 = v$  (速度が入れ替わる)

## 2-5 極限で見る

$$\blacksquare(1) \quad v'_1 \rightarrow -v, \quad v'_2 \rightarrow 0$$

$$\blacksquare(2) \quad v'_1 \rightarrow v, \quad v'_2 \rightarrow 2v$$

軽い相手は2倍の速さで飛んでいき、自分はほぼそのまま。

**■(3) 壁ではね返るのと同じ。**

設定1の「壁に当たってはね返る」は、

$M$  が無限に大きい弾性衝突の特別な場合と見なせる。

**答** (1)  $-v$  と 0 (2)  $v$  と  $2v$  (3) 壁での反射

## 設定 3 反発係数を使う

### 3-1 相対速度で書く

$$\blacksquare(1) \quad e = -\frac{v'_1 - v'_2}{v_1 - v_2}$$

分子・分母とも相対速度 (互いに近づく／遠ざかる速さ)。

**■(2)  $v'_1 = v'_2$ 、つまり2つが同じ速度になる＝一体となる。**

「合体した」と書かれていたら  $e = 0$  の衝突。

**答** (1)  $e = -\frac{v'_1 - v'_2}{v_1 - v_2}$  (2) 一体となる

### 3-2 2本立てる

右向きを正。

$$\blacksquare(1) \quad mv = mv'_1 + mv'_2 \quad \cdots\cdots\textcircled{1}$$

$$e = -\frac{v'_1 - v'_2}{v} \rightarrow v'_2 - v'_1 = ev \quad \cdots\cdots\textcircled{2}$$

$\blacksquare(2)$  ①より  $v'_1 + v'_2 = v$ 。②と足し引きして

$$v'_1 = \frac{(1-e)v}{2}, \quad v'_2 = \frac{(1+e)v}{2}$$

$e = 1$  なら  $0, v$  (入れ替わる)、 $e = 0$  なら両方  $\frac{v}{2}$  (合体)。

両端で確かめると計算ミスに気づける。

$$\text{答} \quad v'_1 = \frac{(1-e)v}{2}, \quad v'_2 = \frac{(1+e)v}{2}$$

### 3-3 大きさの比だけ

$$\blacksquare(1) \quad v = \sqrt{2gh}$$

$$\blacksquare(2) \quad v' = \sqrt{2gh'}$$

$$\blacksquare(3) \quad \text{床は動かないので } e = \frac{v'}{v}$$

$$e = \sqrt{\frac{h'}{h}}$$

高さの比の平方根。よく問われる形。

$$\text{答} \quad (1) \sqrt{2gh} \quad (2) \sqrt{2gh'} \quad (3) \sqrt{h'/h}$$

### 3-4 かけ算になる

$$\blacksquare(1) \quad h_1 = e^2 h$$

$\blacksquare(2)$  毎回  $e^2$  倍になるので

$$h_n = e^{2n} h$$

$$\blacksquare(3) \quad v_n = \sqrt{2gh_n} = e^n \sqrt{2gh}$$

速さは  $e^n$  倍、高さは  $e^{2n}$  倍。

高さのほうが速く減るのは、高さが速さの2乗で効くから。

$$\text{答} \quad (1) e^2 h \quad (2) e^{2n} h \quad (3) e^n \sqrt{2gh}$$

### 3-5 垂直成分だけ変わる

■(1) 水平（床に平行）：変わらず  $v \cos \theta$

鉛直（床に垂直）： $e$  倍になって  $ev \sin \theta$

■(2) はね返る角を  $\theta'$  とすると

$$\tan \theta' = \frac{ev \sin \theta}{v \cos \theta} = e \tan \theta$$

$e < 1$  なら  $\tan \theta' < \tan \theta$  なので小さい。

つまりより寝た角度で飛んでいく。

答 (1)  $v \cos \theta$  と  $ev \sin \theta$  (2) 小さい ( $\tan \theta' = e \tan \theta$ )

## 設定 4 分裂・反動（もともと1つ）

### 4-1 合計0のまま

右向きを正。 $m_1$  の速度は  $-v_1$ 。

■(1)  $0 = m_1(-v_1) + m_2 v_2$

$$v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_2} \text{ (右向き)}$$

■(2)  $v_1 : v_2 = m_2 : m_1$

質量の逆比。軽いほうが速く飛ぶ。

答 (1) 右向きに  $\frac{m_1 v_1}{m_2}$  (2)  $m_2 : m_1$

### 4-2 増えている

■(1) 前：0 後： $mv + m(-v) = 0 \rightarrow$  保存している

■(2) 前：0 後： $2 \times \frac{1}{2}mv^2 = mv^2 \rightarrow$  増えている

■(3) ばねの弾性エネルギー（または火薬の化学エネルギー）から。

運動量は内力では絶対に変わらないが、

エネルギーは内部にたくわえた分が加わって増えることがある。

答 (1) どちらも0で保存 (2)  $0 \rightarrow mv^2$  に増加 (3) 内部にたくわえられていたエネルギー

#### 4-3 台が逆に動く

人が歩く向きを正とする。

■(1) 人の地面に対する速度は  $u + V$

(台の速度に、台に対する速度を足す。)

■(2)  $0 = m(u + V) + MV$

$$V = -\frac{mu}{M+m}$$

負、つまり台は人と逆向きに動く。

「～に対する速度」と書かれたら、まず地面基準に直す。

答 (1)  $u + V$  (2)  $V = -\frac{mu}{M+m}$  (逆向き)

#### 4-4 反動

弾の向きを正。

■(1)  $0 = mv + MV \rightarrow V = -\frac{mv}{M}$

大きさ  $\frac{mv}{M}$ 、弾と逆向き。

■(2)  $V \rightarrow 0$ 。

砲台が重いほど反動は小さい。

受け取る運動量は同じでも、質量が大きければ速度は小さい。

答 (1) 逆向きに  $\frac{mv}{M}$  (2) ほとんど動かない

#### 4-5 合体の逆

■(1) 人の水平方向の運動量は0 (真上から落ちてきた)

$$Mv + 0 = (M + m)V \rightarrow V = \frac{Mv}{M + m}$$

台車は遅くなる。

■(2)  $Mv + mu = (M + m)V'$

$$V' = \frac{Mv + mu}{M + m}$$

$u > v$  なら台車は速くなる。

鉛直方向は床が支えるので、水平成分だけで保存を書く。

答 (1)  $\frac{Mv}{M + m}$  (2)  $\frac{Mv + mu}{M + m}$

### 設定 5 衝突とエネルギーを組み合わせる

### 5-1 3段構え

#### ■(1) 衝突は運動量保存

$$mv = (M + m)V \rightarrow V = \frac{mv}{M + m}$$

#### ■(2) そこから先はエネルギー保存

$$\frac{1}{2}(M + m)V^2 = (M + m)gh$$
$$h = \frac{V^2}{2g} = \frac{m^2 v^2}{2g(M + m)^2}$$

#### ■(3) $h = L(1 - \cos \theta)$ より

$$\cos \theta = 1 - \frac{m^2 v^2}{2gL(M + m)^2}$$

衝突の瞬間にエネルギー保存を使ってはいけない（めり込みで失われる）。

$$\text{答 (1)} \frac{mv}{M + m} \quad \text{(2)} \frac{m^2 v^2}{2g(M + m)^2} \quad \text{(3)} 1 - \frac{m^2 v^2}{2gL(M + m)^2}$$

### 5-2 衝突→弾性エネルギー

#### ■(1) 2つの速度が等しくなったとき。

速度に差があるうちは縮み続け、追いつかれた瞬間が最大。

#### ■(2) 運動量保存

$$mv = (M + m)V \rightarrow V = \frac{mv}{M + m}$$

#### ■(3) ばねはエネルギーを蓄えるだけで失わないので、エネルギー保存

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(M + m)V^2 + \frac{1}{2}kx^2$$
$$x = v\sqrt{\frac{mM}{k(M + m)}}$$

この瞬間だけは運動量とエネルギーを両方使える。

$$\text{答 (1)} 2 \text{物体の速度が等しくなったとき} \quad \text{(2)} \frac{mv}{M + m} \quad \text{(3)} v\sqrt{\frac{mM}{k(M + m)}}$$

### 5-3 衝突→高さ

#### ■(1) 同じ質量の弾性衝突なので速度が入れ替わる

当てた物体：0    当てられた物体： $v$

#### ■(2)

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \rightarrow h = \frac{v^2}{2g}$$

弾性衝突ではエネルギーが失われないので、

もとの物体が直接上ったのと同じ高さまで上がる。

$$\text{答 (1)} 0 \text{ と } v \quad \text{(2)} \frac{v^2}{2g}$$

#### 5-4 エネルギー→衝突

##### ■(1) 落下の間はエネルギー保存

$$v = \sqrt{2gh}$$

##### ■(2) 衝突の瞬間は運動量保存（鉛直方向）

$$mv = (M + m)V$$

$$V = \frac{m\sqrt{2gh}}{M + m}$$

衝突は一瞬なので、その間の重力や床からの力積は無視できる。

これが「衝突では運動量が保存する」と言える理由。

$$\text{答 (1) } \sqrt{2gh} \quad (2) \frac{m\sqrt{2gh}}{M + m}$$

#### 5-5 境目を言う

##### ■(1) エネルギー。物体は1つで、外力（重力）が仕事をする。

##### ■(2) 運動量。エネルギーは変形で失われるので使えない。

##### ■(3) 両方。運動量は0のまま、

エネルギーは「ばねの弾性エネルギー＝運動エネルギーの合計」で書ける。

くっつく＝エネルギーが減る、離れる＝エネルギーが増えると覚える。

$$\text{答 (1) エネルギー (2) 運動量 (3) 両方}$$

### 設定 6 2次元の衝突（成分に分ける）

#### 6-1 軸の取り方

##### ■(1) 衝突前の $m$ の進む向きを $x$ 軸に取る。

こうすると衝突前の  $y$  成分がすべて0になり、式が簡単になる。

##### ■(2) 衝突後の速さを $v'_1$ 、 $v'_2$ とすると

$$0 = mv'_1 \sin \alpha - Mv'_2 \sin \beta$$

$$\text{つまり } mv'_1 \sin \alpha = Mv'_2 \sin \beta$$

横向きの運動量は打ち消し合う。

$$\text{答 (1) 衝突前の進行方向 (2) } mv'_1 \sin \alpha = Mv'_2 \sin \beta$$

## 6-2 2本から2つ出す

$$\blacksquare(1) x : mv = mv'_1 \cos 30^\circ + mv'_2 \cos 60^\circ$$

$$y : 0 = mv'_1 \sin 30^\circ - mv'_2 \sin 60^\circ$$

$$\blacksquare(2) y \text{ より } v'_1 \cdot \frac{1}{2} = v'_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\rightarrow v'_1 = \sqrt{3}v'_2$$

$$x \text{ に代入 } v = \sqrt{3}v'_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + v'_2 \cdot \frac{1}{2} = 2v'_2$$

$$v'_2 = \frac{v}{2}, v'_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}v$$

$$\text{答 } v'_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}v, v'_2 = \frac{v}{2}$$

## 6-3 90° になる理由

$$\blacksquare(1) 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ \rightarrow \text{直角}$$

$$\blacksquare(2) \text{ 前 : } \frac{1}{2}mv^2$$

$$\text{後 : } \frac{1}{2}m\left(\frac{3}{4}v^2\right) + \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{4}v^2\right) = \frac{1}{2}mv^2$$

→ 保存している (弾性衝突)。

**■(3) 同じ質量どうしの弾性衝突では、必ず直角に分かれる。**

ビリヤードで球が直角に散るのはこれ。

逆に、直角でなければ弾性衝突ではない。

**答 (1) 90° (2) 保存している (3) 等質量の弾性衝突では必ず直角に分かれる**

## 6-4 ベクトルを合成

東を  $x$ 、北を  $y$  とする。

$$\blacksquare(1) x : mv = 2mV_x \rightarrow V_x = \frac{v}{2}$$

$$y : mv = 2mV_y \rightarrow V_y = \frac{v}{2}$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \frac{v}{\sqrt{2}}$$

$$\blacksquare(2) \tan \theta = \frac{V_y}{V_x} = 1 \rightarrow \text{北東 (東から } 45^\circ \text{ 北)}$$

成分ごとに保存を書いてから合成する。

**答 (1)  $\frac{v}{\sqrt{2}}$  (2) 北東 (東から 45°)**

**6-5 はじめから斜め**

合体後の質量は  $3m$ 。

$$\blacksquare(1) \text{ 東: } m(2v) = 3mV_x \rightarrow V_x = \frac{2v}{3}$$

$$\text{北: } 2m(v) = 3mV_y \rightarrow V_y = \frac{2v}{3}$$

$$\blacksquare(2) V = \frac{2v}{3}\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}v$$

たまたま両成分が同じになったので、向きは北東。

質量が違って、成分ごとに独立に保存することは変わらない。

$$\text{答 (1) ともに } \frac{2v}{3} \quad (2) \frac{2\sqrt{2}}{3}v$$