

単元別ではなく「**解き方の型**」ごとに並べた60問。同じ型でも設定と問い方はすべて変えてあるので、**型が身についていれば初見でも解けるはず。数値はほとんど出てこない。すべて文字で答える**—— そのぶん「何と何を結ぶ式か」がむき出しになる。

1周目 冒頭の手順を読んでから5問続けて解く。同じ型を連続でやることに意味がある。

2周目 手順を見ずに解く。詰まったら「与えられた文字／求める文字／出てこない文字」の3行を書く。

3周目 型番号をランダムに選んで解く。**初見の問題で型を言い当てられるか**が本番の力。

重力加速度は g 、ことわりのない糸・ばね・滑車は軽くなめらかとする。

[illegible]

問題編

解説は後半にまとめてある。先に見ないこと。

答えはすべて文字式。数値が出てきたら、どこかで設定を読み間違えている。

等加速度運動 —— 消したい文字で式を選ぶ

記号の約束

v_0 はじめの速さ v あとの速さ a 加速度 t 時間 L, x 距離・変位 h 高さ g 重力加速度

この型の手順

1. 与えられた文字と求める文字を書き出す
2. 問題文に出てこない文字を探す（これが決め手）
3. その文字が入っていない式を選ぶ
4. 向きの正を決めてから代入する（投げ上げなら $a = -g$ ）

使う式

- $v = v_0 + at$ … x が入っていない
- $x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ … v が入っていない
- $v^2 - v_0^2 = 2ax$ … t が入っていない
- v-tグラフ：傾き＝加速度、面積＝変位

1-1 距離→速さ ★

3周チェック ☐ ☐ ☐

静止していた物体が、一定の加速度 a で直線上を動き出した。

1. 距離 L 進んだときの速さ v を a 、 L で表せ。
2. 速さが 2 倍になるまでに進む距離は、 v になるまでの距離の何倍か。

1-2 停止までの距離と時間 ★★3周チェック ☐ ☐ ☐

速さ v_0 で走っていた物体が、一定の大きさの加速度で減速し、距離 d 進んで停止した。

1. 加速度の大きさ a を v_0 、 d で表せ。
2. 停止するまでの時間 t を v_0 、 d で表せ。

1-3 投げ上げ ★★3周チェック ☐ ☐ ☐

地面から小球を鉛直上向きに初速 v_0 で投げ上げた。空気抵抗は無視する。

1. 最高点の高さ h を v_0 、 g で表せ。
2. 最高点に達するまでの時間を求めよ。
3. 地面に戻るまでの全体の時間を求めよ。

1-4 時間と距離から ★★3周チェック ☐ ☐ ☐

静止していた物体が一定の加速度で動き出し、時間 T の間に距離 L 進んだ。

1. 加速度 a を L 、 T で表せ。
2. 時間 T の時点での速さ v を L 、 T で表せ。
3. v と「この区間の平均の速さ」の関係を述べよ。

1-5 グラフ ★★3周チェック ☐ ☐ ☐

時刻 0 に速さ v_0 であった物体が、時間 T かけて一様に減速し、ちょうど速さ 0 になった。

1. この間に進んだ距離 L を v_0 、 T で表せ。
2. 加速度の大きさを v_0 、 T で表せ。
3. はじめの $\frac{T}{2}$ の間に進む距離は、全体の何倍か。

運動方程式（1物体）—— 力を描いて1方向に射影する

記号の約束

m 質量 F 加えた力 N 垂直抗力 f 摩擦力 μ' 動摩擦係数 T 糸の張力 θ 斜面の傾角

この型の手順

1. 力を全部描く：重力 $\rightarrow$ 接触している面（ N と f ） $\rightarrow$ つながっているもの（ T 、 kx ）
2. 正の向きを1本決めて図に書き込む（斜面なら斜面に沿った向き）
3. その向きに $ma = F$ を立てる。垂直な向きはつり合いで N を出す
4. 「静止」「等速」とあれば $a = 0$ —— つり合いの式になる

使う式

- $ma = F$ （ F はその向きの力の成分の和）
- 斜面：斜面方向 $mg \sin \theta$ 、垂直方向 $mg \cos \theta$
- 動摩擦力 $f' = \mu' N$ （速さによらず一定）
- $N = mg$ とは限らない。毎回つり合いから出す

2-1 水平面+摩擦 ★

3周チェック ☐ ☐ ☐

水平な床の上の質量 m の物体を、水平方向に一定の力 F で引く。床との動摩擦係数を μ' とする。

1. 垂直抗力 N を求めよ。
2. 加速度 a を F 、 m 、 μ' 、 g で表せ。
3. 物体が動き出さないための F の条件を書け（静止摩擦係数も μ' に等しいとする）。

2-2 なめらかな斜面 ★3周チェック ☐ ☐ ☐

傾角 θ のなめらかな斜面上に質量 m の物体を置き、静かに手を放した。

1. 斜面に沿った加速度の大きさを求めよ。
2. 斜面から受ける垂直抗力を求めよ。
3. $\theta \rightarrow 90^\circ$ としたとき、この2つはどうなるか。

2-3 エレベーター ★★3周チェック ☐ ☐ ☐

エレベーターの床に置かれた体重計の上に、質量 m の人が乗っている。エレベーターは鉛直上向きに加速度 a で運動している (a は負の値もとりのう)。

1. 体重計が示す力 N を m 、 g 、 a で表せ。
2. $a = 0$ のときはどうなるか。
3. $N = 0$ となるのはどんなときか。

2-4 斜めのつり合い ★★3周チェック ☐ ☐ ☐

天井から軽い糸で質量 m のおもりを吊るし、水平方向に力 F を加えたところ、糸が鉛直から角 θ だけ傾いて静止した。

1. 糸の張力 T を m 、 g 、 θ で表せ。
2. F を m 、 g 、 θ で表せ。
3. F を大きくしていくと θ はどうなるか。 90° になることはあるか。

2-5 斜面を等速で引く ★★3周チェック ☐ ☐ ☐

傾角 θ のあらい斜面上の質量 m の物体を、斜面に平行な力 F で引き上げ、一定の速さで動かし続ける。動摩擦係数を μ' とする。

1. 必要な力 F を m 、 g 、 θ 、 μ' で表せ。
2. 同じ物体を斜面に沿って一定の速さで**下ろす**ときに必要な力を求めよ。
3. $\tan \theta = \mu'$ のとき、(2) の答えはどうなるか。その意味を述べよ。

PATTERN 03

連結体 —— まとめて → 1つずつ

記号の約束

m_1, m_2 各物体の質量 a 共通の加速度 T 糸の張力 F 外から加えた力 N 接触面がおよぼす力

この型の手順

1. 糸や接触でつながっていれば**加速度の大きさは共通**と確認する
2. **全体を1つの物体**とみなして式を立て、 a を出す（内力は消える）
3. **1つだけ取り出して**式を立て、張力や接触力を出す
4. 検算：張力は「軽いほうの重さ」と「重いほうの重さ」の**間**に入る

使う式

- 全体： $(\Sigma m)a =$ （外から加わる力の和）
- 各物体： $m_i a =$ （その物体にはたらく力の和）
- 同じ糸の張力はどこでも等しい（軽い糸・なめらかな滑車）

3-1 接触2物体 ★★

3周チェック ☐ ☐ ☐

なめらかな水平面上に質量 m_1 と m_2 の物体を接触させて置き、 m_1 の側から水平に力 F で押す。

1. 2物体の加速度 a を求めよ。
2. m_1 が m_2 を押す力の大きさを求めよ。
3. 逆に m_2 の側から同じ大きさ F で押したとき、接触面の力はどうなるか。

3-2 定滑車 ★★3周チェック ☐ ☐ ☐

軽い定滑車に軽い糸をかけ、両端に質量 m_1 、 m_2 ($m_1 > m_2$) のおもりを吊るして静かに放した。

1. 加速度の大きさ a を求めよ。
2. 糸の張力 T を求めよ。
3. $m_1 = m_2$ としたとき、 a と T はどうなるか。

3-3 水平+吊り下げ ★★3周チェック ☐ ☐ ☐

なめらかな水平面上の質量 m_1 の物体に糸をつけ、机の端の軽い滑車を通して質量 m_2 のおもりを吊るした。

1. 加速度の大きさを求めよ。
2. 糸の張力を求めよ。
3. $m_1 \rightarrow 0$ としたとき、加速度はどうなるか。

傾角 θ のなめらかな斜面上に質量 m_1 の物体を置き、斜面の頂上の滑車を通した糸で質量 m_2 のおもりを鉛直に吊るした。

1. m_2 が下がる向きを正として、加速度 a を求めよ。
2. 2物体が静止したままとなる条件を書け。
3. $\theta = 90^\circ$ のとき、この式は何を表すか。

なめらかな水平面上に質量 m_1 、 m_2 、 m_3 の物体をこの順に軽い糸でつなぎ、 m_1 を水平に力 F で引く。

1. 全体の加速度を求めよ。
2. m_1 と m_2 をつなぐ糸の張力 T_1 を求めよ。
3. m_2 と m_3 をつなぐ糸の張力 T_2 を求めよ。
4. T_1 と T_2 の大小を比べ、その理由を述べよ。

摩擦 —— 静止か滑るかを先に判定する

記号の約束

μ 静止摩擦係数 μ' 動摩擦係数 f はたらいっている摩擦力 N 垂直抗力 θ 傾角 α 力の向きの角

この型の手順

1. まず「動かない」と仮定して、つり合いに必要な摩擦力 f を求める
2. その f を最大静止摩擦力 μN と比べる
3. $f \leq \mu N$ なら静止（摩擦力はさっきの f そのもの）
4. $f > \mu N$ なら滑り出す。動摩擦 $\mu' N$ に置き換えて運動方程式を立て直す

使う式

- 静止摩擦力はつり合いから決まる（ μN ではない）
- 最大静止摩擦力 $= \mu N$ 、動摩擦力 $= \mu' N$
- 斜面で滑り出す条件： $\tan \theta = \mu$ （質量によらない）

4-1 滑り出す角 ★

3周チェック ☐ ☐ ☐

傾角 θ の斜面上に質量 m の物体を静かに置く。斜面との静止摩擦係数を μ とする。

1. 物体が滑り出さないための θ の条件を μ で表せ。
2. この条件に質量 m が入らない理由を述べよ。

4-2 動き出す力 ★★3周チェック ☐ ☐ ☐

水平な床に置かれた質量 m の物体を、水平方向に力 F で押す。静止摩擦係数を μ とする。

1. 物体が動き出す条件を F について書け。
2. F がその半分の大きさのとき、はたらいっている摩擦力の大きさを求めよ。

4-3 静止摩擦の向き ★★3周チェック ☐ ☐ ☐

傾角 θ の斜面上に置かれた質量 m の物体が静止している。

1. 物体にはたらく摩擦力の大きさと向きを答えよ。
2. この物体を斜面に沿って上向きにゆっくり動かそうとするとき、摩擦力の向きはどうなるか。
3. 斜面の傾きを 0 に近づけると、摩擦力はどうなるか。

4-4 斜め上向きに引く ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

水平な床に置かれた質量 m の物体を、水平から角 α だけ上向きに傾けた力 F で引く。静止摩擦係数を μ とする。

1. 垂直抗力 N を m 、 g 、 F 、 α で表せ。
2. 物体が動き出す条件を F について書け。
3. 同じ F でも α をつけたほうが動かしやすいことがある。その理由を述べよ。

4-5 滑り出したあと ★★3周チェック ☐ ☐ ☐

傾角 θ の斜面上に静かに置いた質量 m の物体が滑り出した。動摩擦係数を μ' とする。

1. 滑っている間の加速度の大きさを求めよ。
2. 斜面を距離 L 滑ったときの速さを求めよ。
3. この2つの答えに質量が入らない理由を述べよ。

剛体 —— 軸を選んで未知数を消す

記号の約束

M 棒や板の質量 m おもりや人の質量 L 棒の長さ N 垂直抗力 T 糸の張力 μ 静止摩擦係数

この型の手順

1. 力を全部描く。重力は重心にはたらく（一様な棒なら中点）
2. 未知の力がいちばん多く集まる点を回転軸に選ぶ
3. その点まわりでモーメントの和 $= 0$ （軸を通る力はどうでも 0 で消える）
4. 足りない分は力のつり合い（水平・鉛直）で補う

使う式

- モーメント $M = F\ell$ (ℓ は軸から作用線への垂線)
- 斜めの力は「分解する」か「うでを垂線で取る」のどちらか一方
- 重心 $x_G = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$ 。くり抜きは負の質量

5-1 両端支持 ★★

3周チェック ☐ ☐ ☐

長さ L 、質量 M の一様な棒を両端で水平に支える。左端から距離 a の位置に質量 m のおもりをのせた。

1. 左端の支持力 N_L を求めよ。
2. 右端の支持力 N_R を求めよ。
3. a を大きくしていくと N_L と N_R はどう変わるか。

5-2 はしご ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

なめらかな鉛直の壁に、長さ L 、質量 M の一様な棒を、水平な床と角 θ をなすように立てかけた。床との静止摩擦係数を μ とする。

1. 壁から受ける垂直抗力 N' を M 、 g 、 θ で表せ。
2. 棒が滑らないための条件を θ と μ で表せ。
3. この条件に L と M が入らない理由を述べよ。

5-3 糸で支える棒 ★★3周チェック ☐ ☐ ☐

長さ L 、質量 M の一様な棒の一端を壁の蝶番でとめ、水平に保っている。棒の他端から、棒と角 θ をなす向きに軽い糸を張って支えている。

1. 糸の張力 T を M 、 g 、 θ で表せ。
2. θ を小さくしていくと T はどうなるか。

5-4 くり抜き ★★★

3周チェック ☐ ☐ ☐

一辺 a の一様な正方形の板から、一つの隅にある一辺 $\frac{a}{2}$ の正方形を切り取った。切り取られていない側の隅を原点、板の辺に沿って x 軸・ y 軸をとる。

1. 残った板の重心の x 座標を求めよ。
2. 対称性から y 座標について何が言えるか。

5-5 人が登る ★★★

3周チェック ☐ ☐ ☐

なめらかな壁に、長さ L 、質量 M の一様なはしごを水平と角 θ で立てかけた。床との静止摩擦係数は μ である。質量 m の人が、はしごの下端から距離 x のところまで登った。

1. 壁から受ける垂直抗力を M 、 m 、 g 、 L 、 x 、 θ で表せ。
2. はしごが滑り出さないための x の条件を求めよ。
3. 人が登るほど危険になる理由を、式から説明せよ。

仕事とエネルギー —— 非保存力の有無で式を選ぶ

記号の約束

W 仕事 K 運動エネルギー U 位置エネルギー k ばね定数 μ' 動摩擦係数 h 高さ

この型の手順

1. 時間が問われていないことを確認する（問われていればこの型ではない）
2. 非保存力（摩擦・空気抵抗・外から加える力）があるかを判定する
3. なければ力学的エネルギー保存： $\frac{1}{2}mv^2 + mgh + \frac{1}{2}kx^2 = \text{一定}$
4. あれば（前）＝（後）＋摩擦熱、またはエネルギー原理に外力の仕事を足す

使う式

- $W = Fx \cos \theta$ （垂直なら 0）
- $K = \frac{1}{2}mv^2$ 、 $U = mgh$ 、 $U = \frac{1}{2}kx^2$
- 摩擦熱 $= f \times$ （すべった道のり）
- 重力の仕事は経路によらず高さの差だけで決まる

6-1 曲面を滑る ★

3周チェック ☐ ☐ ☐

なめらかな曲面の高さ h の点から、質量 m の物体を静かに滑らせた。

1. 曲面の最下点での速さを求めよ。
2. この答えが曲面の形によらない理由を述べよ。
3. 同じ高さから質量 $2m$ の物体を滑らせると、速さは何倍になるか。

6-2 摩擦で止まる ★★3周チェック ☐ ☐ ☐

あらい水平面上を初速 v_0 で滑り出した質量 m の物体が、やがて静止した。動摩擦係数を μ' とする。

1. 静止するまでに滑る距離 d を求めよ。
2. 初速を 2 倍にすると d は何倍になるか。
3. この距離が質量によらない理由を述べよ。

6-3 バネで打ち出す ★★3周チェック ☐ ☐ ☐

ばね定数 k のばねを自然長から x だけ縮め、質量 m の物体をなめらかな水平面上に打ち出す。

1. 物体がばねから離れるときの速さを求めよ。
2. 縮みを 2 倍にすると速さは何倍になるか。
3. 同じ縮みで質量を 4 倍にすると速さは何倍になるか。

6-4 斜面→あらい面 ★★3周チェック ☐ ☐ ☐

なめらかな斜面の高さ h の点から質量 m の物体を静かに滑らせ、斜面の下端につながるあらい水平面（動摩擦係数 μ' ）に出た。

1. 水平面に出た瞬間の速さを求めよ。
2. 水平面上を滑って止まるまでの距離 d を求めよ。
3. μ' を半分にすると d はどうなるか。

6-5 あらい斜面を引き上げる ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

傾角 θ のあらい斜面（動摩擦係数 μ' ）に沿って、質量 m の物体を高さ h だけ一定の速さで引き上げた。

1. 斜面に沿って移動した距離を h 、 θ で表せ。
2. 引く力がした仕事を m 、 g 、 h 、 μ' 、 θ で表せ。
3. $\theta \rightarrow 90^\circ$ としたとき、この仕事はどうなるか。その意味を述べよ。

力積と運動量保存 —— 「一瞬」の出来事

記号の約束

p 運動量 F 力 t 力がはたらいた時間 v 衝突前の速度 v' 衝突後の速度 e 反発係数

この型の手順

1. 時間が絡むかを見る。「接触時間」「平均の力」があれば力積
2. 衝突・合体・分裂なら運動量保存
3. 正の向きを1本決める（左向きは速度は負で書く）
4. 反発係数が与えられていれば、保存則と連立する

使う式

- $Ft = mv' - mv$ （力積＝運動量の変化）
- $m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2$
- $e = -\frac{v'_1 - v'_2}{v_1 - v_2}$
- 衝突では力学的エネルギーは保存しない（ $e = 1$ のときだけ保存）

7-1 壁との衝突 ★★

3周チェック ☐ ☐ ☐

質量 m の球が速さ v で壁に垂直に当たり、速さ v' で跳ね返った。接触時間を t とする。

1. 球が受けた力積の大きさを求めよ。
2. 壁が球におよぼした平均の力の大きさを求めよ。
3. この衝突の反発係数を v 、 v' で表せ。

7-2 一定の力 ★3周チェック ☐ ☐ ☐

なめらかな水平面上で静止していた質量 m の物体に、一定の力 F を時間 t の間だけ加えた。

1. 加えたあとの速さを求めよ。
2. この間に物体が進む距離を求めよ。
3. 同じ F を 2 倍の時間加えると、速さと距離はそれぞれ何倍になるか。

7-3 合体 ★★3周チェック ☐ ☐ ☐

なめらかな水平面上で、質量 m の物体が速さ v で進み、静止していた質量 M の物体に衝突して一体となった。

1. 合体後の速さ V を求めよ。
2. 衝突で失われた力学的エネルギーを m 、 M 、 v で表せ。
3. $M \gg m$ のとき、失われるエネルギーはもとの何割に近づくか。

7-4 分裂 ★★3周チェック ☐ ☐ ☐

なめらかな水平面上で静止していた質量 M の物体が、内部のばねのはたらきで2つに分かれ、質量 m の破片が速さ v で飛び出した。

1. 残りの破片の速さと向きを答えよ。
2. 分裂によって生じた運動エネルギーの合計を求めよ。
3. 2つの破片の運動エネルギーの比を m 、 M で表せ。

7-5 台車の上を歩く ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

なめらかな水平面上に置かれた質量 M の台車の上に、質量 m の人が乗って静止している。人が台車に対して速さ u で歩き出した。

1. 台車の速さを m 、 M 、 u で表せ。
2. 人の（地面に対する）速さを求めよ。
3. $M \rightarrow \infty$ のとき、台車と人の速さはそれぞれどうなるか。

2段階問題 —— 一瞬は運動量、そのあとはエネルギー

記号の約束

v 衝突前の速さ V 衝突直後の共通の速さ m 飛んでくる物体の質量 M 止まっている物体の質量 h 上がる高さ

この型の手順

1. 出来事を「一瞬のもの」と「そのあと」に区切る
2. 一瞬の部分（衝突・合体・分裂）は**運動量保存**
3. そのあと（振れ上がる・滑る・上がる）は**エネルギー**
4. 境目の速さを文字で置いて、2本の式をつなぐ

使う式

- 衝突： $mv = (m + M)V$ など
- そのあと： $\frac{1}{2}(m + M)V^2 = (m + M)gh$ 、 $= \mu'(m + M)gd$ など
- 1本の式でまとめて解こうとしない（エネルギーは衝突で失われる）

8-1 振れ上がる ★★★

3周チェック ☐ ☐ ☐

軽い糸で吊るされた質量 M の木片に、質量 m の弾丸が水平に速さ v で撃ち込まれ、内部で止まった。

1. 撃ち込まれた直後の、木片と弾丸の共通の速さ V を求めよ。
2. 木片が振れ上がる高さ h を m 、 M 、 v 、 g で表せ。
3. はじめの運動エネルギーのうち、位置エネルギーに変わった割合を求めよ。

8-2 滑って止まる ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

あらい水平面（動摩擦係数 μ' ）の上に静止していた質量 M の物体に、質量 m の弾丸が水平に速さ v で撃ち込まれて内部で止まった。

1. 直後の共通の速さを求めよ。
2. 一体となった物体が滑って止まるまでの距離 d を求めよ。
3. v を 2 倍にすると d は何倍になるか。

8-3 落として当てる ★★3周チェック ☐ ☐ ☐

高さ h から質量 m の球を静かに落とし、床の上に静止していた質量 M の物体に衝突させて一体となった。

1. 衝突直前の球の速さを求めよ。
2. 衝突直後の共通の速さを求めよ。
3. この問題では、どちらの法則を先に使ったか答えよ。

なめらかな水平面上で、ばね定数 k のばねを x だけ縮めて質量 m の物体を打ち出し、静止していた質量 M の物体に弾性衝突させた。

1. 衝突直前の m の速さを求めよ。
2. 弾性衝突 ($e = 1$) のあとの M の速さを求めよ。
3. $m = M$ のとき、衝突後の2物体はどうなるか。

長さ l の軽い糸につけた質量 m の球を、糸を張ったまま水平の位置から静かに放し、最下点で静止している質量 M の球に反発係数 e で衝突させた。

1. 衝突直前の m の速さを求めよ。
2. 衝突直後の M の速さを求めよ。
3. $e = 0$ とすると (2) はどうなるか。それは何を意味するか。

円運動 —— 向心方向に運動方程式

記号の約束

r 円の半径 v 速さ ω 角速度 T 周期または張力（問題文で区別） θ 糸や面の傾き

この型の手順

1. 円の中心がどこかをはっきりさせる
2. 力を描く。新しい力（向心力）は描き足さない
3. 中心を向く方向に $m\frac{v^2}{r} =$ （力の中心向き成分の和）
4. 円の面と垂直な方向はつり合いで処理する

使う式

- $v = r\omega$ 、 $a = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$ 、 $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- $m\frac{v^2}{r} = F$ （右辺は**実在する力**の中心向き成分）
- 向心力は**仕事をしない**（速度と垂直）

9-1 水平面内 ★

3周チェック ☐ ☐ ☐

なめらかな水平面上で、長さ l の軽い糸につないだ質量 m の物体が、速さ v で等速円運動をしている。

1. 糸の張力を求めよ。
2. 角速度と周期を v 、 l で表せ。
3. この張力がする仕事はいくらか。理由も述べよ。

9-2 円錐振り子 ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

長さ l の軽い糸の先に質量 m の小球をつけ、糸が鉛直と角 θ をなす円錐振り子として水平面内で等速円運動させた。

1. 糸の張力を m 、 g 、 θ で表せ。
2. 円の半径を l 、 θ で表せ。
3. 周期を l 、 g 、 θ で表せ。

9-3 カーブ ★★3周チェック ☐ ☐ ☐

半径 r の水平なカーブを、質量 m の自動車が速さ v で曲がる。タイヤと路面の静止摩擦係数を μ とする。

1. 曲がるために必要な向心力を求めよ。
2. この向心力の正体は何か。
3. 滑らずに曲がれる最大の速さを μ 、 g 、 r で表せ。

9-4 角速度で表す ★★3周チェック ☐ ☐ ☐

質量 m の物体が半径 r の円周上を角速度 ω で等速円運動している。

1. 向心加速度を r 、 ω で表せ。
2. 向心力を m 、 r 、 ω で表せ。
3. 角速度を変えずに半径を 2 倍にすると、向心力は何倍になるか。
4. 速さを変えずに半径を 2 倍にすると、向心力は何倍になるか。

9-5 バンク ★★★3周チェック ☐ ☐ ☐

半径 r のカーブが、水平から角 θ だけ傾けて作られている（バンク）。路面はなめらかで摩擦がないものとする。

1. 質量 m の車にはたらく力をすべて挙げよ。
2. 摩擦にたよらずに曲がれる速さ v を g 、 r 、 θ で表せ。
3. この速さが質量によらない理由を述べよ。

鉛直円運動 —— 運動方程式とエネルギー保存の2本立て

記号の約束

l, r 糸の長さ・円の半径 v_0 最下点での速さ v_t 最高点での速さ T 張力 N 垂直抗力

この型の手順

1. 速さはエネルギー保存で求める（高さの差を使う）
2. その点で向心方向の運動方程式を立てる（力の向きは点ごとに変わる）
3. 条件を書く：糸なら $T \geq 0$ 、面から離れないなら $N \geq 0$
4. 最高点・最下点は力の向きが単純なので、そこで立てるのが基本

使う式

- 最高点： $mg + T = \frac{mv^2}{r}$ （重力も張力も中心向き）
- 最下点： $T - mg = \frac{mv^2}{r}$ （張力が中心向き、重力は逆）
- エネルギー保存： $\frac{1}{2}v_0^2 = \frac{1}{2}v^2 + gh$
- 1周する条件：最高点で $v^2 \geq gr$

10-1 最高点の速さ ★★

3周チェック ☐ ☐ ☐

長さ l の軽い糸につけた質量 m の小球を、最下点で速さ v_0 を与えて鉛直面内で回した。

1. 最高点での速さ v_t を v_0 、 g 、 l で表せ。
2. この式が成り立つために v_0 が満たすべき条件を書け（ひとまず速さが実在する条件）。

10-2

たるまない条件 ★★

3周チェック ☐ ☐ ☐

同じ装置で、最高点における糸の張力を考える。

1. 最高点での向心方向の運動方程式を書け。
2. 糸がたるまないための最高点での速さの条件を求めよ。
3. なぜ「速さが 0 以上」では足りないのか説明せよ。

10-3

1周する初速 ★★★

3周チェック ☐ ☐ ☐

長さ l の糸につけた質量 m の小球を、最下点から回して鉛直面内で1周させたい。

1. 最下点で与えるべき最小の速さを g 、 l で表せ。
2. そのときの最下点での糸の張力を m 、 g で表せ。

半径 r のなめらかな円筒の内側に沿って、質量 m の小球が鉛直面内を運動している。最下点での速さを v_0 とする。

1. 最高点での垂直抗力 N を m 、 v_0 、 g 、 r で表せ。
2. 面から離れずに1周するための v_0 の条件を求めよ。
3. これが糸の場合と同じ条件になる理由を述べよ。

10-5

半球から離れる ★★★

3周チェック ☐ ☐ ☐

半径 R のなめらかな半球の頂上に置いた質量 m の小球が、静かに滑り出した。球の中心から見て、頂上から角 θ だけ回った位置を考える。

1. その位置での速さを g 、 R 、 θ で表せ。
2. その位置での向心方向の運動方程式を書け。
3. 小球が面から離れる角 θ を求めよ。

PATTERN 11

単振動 —— $ma = -Kx$ の形にして周期を読む

記号の約束

k ばね定数 K 復元力の比例定数 ($F = -Kx$) A 振幅 ω 角振動数 T 周期 x 振動の中心からの変位

この型の手順

1. つり合いの位置を探す。そこが振動の中心
2. 中心から x だけずらした状態で運動方程式を立てる
3. $ma = -Kx$ の形に整理し、 K を読む
4. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ 。速さが要るなら $v^2 = \omega^2(A^2 - x^2)$

使う式

- $a = -\omega^2 x$, $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- $v_{max} = A\omega$ (中心), $a_{max} = A\omega^2$ (端)
- t が出てこないなら $v^2 = \omega^2(A^2 - x^2)$
- ばね振り子 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, 単振り子 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

11-1 水平ばね ★

3周チェック ☐ ☐ ☐

なめらかな水平面上で、ばね定数 k のばねの一端を壁に固定し、他端に質量 m の物体をつけて振動させる。

1. 自然長の位置からの変位を x として運動方程式を書け。
2. 周期を m 、 k で表せ。
3. 振幅を 2 倍にすると周期は何倍になるか。

11-2

鉛直ばね ★★★

3周チェック ☐ ☐ ☐

ばね定数 k のばねを天井から鉛直につるし、質量 m のおもりをつけて振動させる。

1. つり合いの位置は自然長から何だけ伸びた点か。
2. つり合いの位置を原点として、変位 x での運動方程式を立てよ。
3. 周期を求め、水平の場合と比べよ。

11-3

途中の速さ ★★

3周チェック ☐ ☐ ☐

振幅 A 、角振動数 ω の単振動をしている物体がある。

1. 振動の中心からの変位が x のときの速さを A 、 ω 、 x で表せ。
2. 変位が $\frac{A}{2}$ のときの速さを求めよ。
3. 速さが最大値の半分になるのは、変位がいくらのときか。

11-4

単振り子 ★★

3周チェック ☐ ☐ ☐

長さ l の軽い糸の先に質量 m のおもりをつけた単振り子が、小さな振れ幅で振動している。

1. 周期を l 、 g で表せ。
2. 糸の長さを 4 倍にすると周期は何倍になるか。
3. おもりの質量を 2 倍にすると周期は何倍になるか。

11-5

ばねの合成 ★★★

3周チェック ☐ ☐ ☐

ばね定数 k_1 、 k_2 の2本のばねと質量 m の物体を、なめらかな水平面上でつなぐ。

1. 2本を**並列**（物体の同じ側に並べてつなぐ）にしたときの周期を求めよ。
2. 2本を**直列**（一直線につないだ先に物体）にしたときの周期を求めよ。
3. 同じ2本なら、どちらのほうが周期が短い。

万有引力 —— 円軌道の条件とエネルギー保存

記号の約束

G 万有引力定数 M 中心天体の質量 m まわる物体の質量 r 中心からの距離 R 天体の半径 g 地表の重力加速度

この型の手順

1. 円軌道なら万有引力が向心力： $G\frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$
2. 地表がからむなら $GM = gR^2$ で G と M を消す
3. 速さや高さの変化ならエネルギー保存： $\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}$ が一定
4. 楕円なら面積速度一定 (rv 一定) と $T^2 \propto a^3$

使う式

- $F = G\frac{Mm}{r^2}$ 、 $U = -G\frac{Mm}{r}$ (負)
- 円軌道： $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ 、 $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$
- 地表： $GM = gR^2$

12-1 円軌道 ★★

3周チェック ☐ ☐ ☐

質量 M の天体のまわりを、質量 m の人工衛星が半径 r の円軌道で回っている。

1. 衛星の速さを G 、 M 、 r で表せ。
2. 公転周期を G 、 M 、 r で表せ。
3. この2つが衛星の質量によらない理由を述べよ。

12-2

第一宇宙速度 ★★

3周チェック ☐ ☐ ☐

半径 R 、地表での重力加速度 g の惑星について答えよ。

1. GM を g 、 R で表せ。
2. 地表すれすれを回る人工衛星の速さを g 、 R で表せ。
3. その周期を g 、 R で表せ。

12-3

脱出速度 ★★★

3周チェック ☐ ☐ ☐

半径 R 、地表の重力加速度 g の惑星の表面から、質量 m の物体を打ち上げる。

1. 無限に遠くまで到達するための最小の速さを g 、 R で表せ。
2. これは第一宇宙速度の何倍か。
3. 打ち上げる物体の質量が大きいほど、この速さは大きくなるか。

12-4

軌道を変える ★★★

3周チェック ☐ ☐ ☐

質量 M の天体のまわりの半径 r の円軌道を回る、質量 m の衛星について答えよ。

1. この衛星の運動エネルギーを G 、 M 、 m 、 r で表せ。
2. 運動エネルギーと位置エネルギーの和（全エネルギー）を求めよ。
3. 半径 r_1 の軌道から r_2 ($> r_1$) の軌道へ移すのに必要なエネルギーを求めよ。

12-5

ケプラー ★★

3周チェック ☐ ☐ ☐

同じ中心天体のまわりを回る2つの天体、および1つの楕円軌道について答えよ。

1. 軌道の長半径が n 倍の天体の公転周期は何倍か。
2. 楕円軌道で、近日点の距離が遠日点の $\frac{1}{k}$ のとき、近日点の速さは遠日点の何倍か。
3. (2) で使った法則の名前を答えよ。

解説編

各問の冒頭に「この型のどこを使ったか」を書いてある。

解けなかった問題は、型の手順のどの段で詰まったかを特定する。

パターン 1 等加速度運動 —— 消したい文字で式を選ぶ

1-1 t が出てこないで $v^2 - v_0^2 = 2ax$

■(1) 与えられたのは a と L 、求めるのは v 。時間 t は出てこない。

→ t を含まない式 $v^2 - v_0^2 = 2ax$ を選ぶ ($v_0 = 0$)

$$v^2 = 2aL \rightarrow v = \sqrt{2aL}$$

■(2) $v \propto \sqrt{L}$ すなわち $L \propto v^2$ 。

速さが 2 倍なら距離は $2^2 = 4$ 倍。

(車の制動距離が速さの2乗で伸びるのはこれ。)

答 (1) $v = \sqrt{2aL}$ (2) 4 倍

1-2 2本を使い分ける

■(1) 時間が問われていないので $v^2 - v_0^2 = 2ax$

$$0 - v_0^2 = -2ad \rightarrow a = \frac{v_0^2}{2d}$$

■(2) ここで初めて時間の式を使う。 $v = v_0 - at$ に $v = 0$ を入れて

$$t = \frac{v_0}{a} = \frac{v_0}{v_0^2/(2d)} = \frac{2d}{v_0}$$

(別解：平均の速さが $\frac{v_0}{2}$ なので $d = \frac{v_0}{2}t$ から直接出る。)

答 (1) $a = \frac{v_0^2}{2d}$ (2) $t = \frac{2d}{v_0}$

1-3 最高点は $v=0$

上向きを正、 $a = -g$ とする。

■(1) 最高点は $v = 0$ 。時間が要らないので $v^2 - v_0^2 = 2ay$

$$0 - v_0^2 = -2gh \rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g}$$

■(2) $v = v_0 - gt$ に $v = 0$ を入れて $t = \frac{v_0}{g}$

■(3) 上りと下りは対称なので $\frac{2v_0}{g}$

($y = 0$ を $y = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$ に入れても同じ。)

答 (1) $h = \frac{v_0^2}{2g}$ (2) $\frac{v_0}{g}$ (3) $\frac{2v_0}{g}$

1-4 v が出てこない式から入る

■(1) 与えられたのは T と L 。速さ v が出てこないで $x = v_0t + \frac{1}{2}at^2$

$$L = \frac{1}{2}aT^2 \rightarrow a = \frac{2L}{T^2}$$

■(2) $v = aT = \frac{2L}{T^2} \cdot T = \frac{2L}{T}$

■(3) 平均の速さは $\frac{L}{T}$ なので、 v はその 2 倍。

等加速度で $v_0 = 0$ なら、平均は最終速度のちょうど半分になる。

答 (1) $a = \frac{2L}{T^2}$ (2) $v = \frac{2L}{T}$ (3) 平均の速さの 2 倍

1-5 面積=変位、傾き=加速度

■(1) v - t グラフは三角形。面積が変位

$$L = \frac{1}{2}v_0T$$

■(2) 傾きが加速度。 $\frac{v_0}{T}$ (向きは減速)

■(3) はじめの $\frac{T}{2}$ で速さは $\frac{v_0}{2}$ まで落ちる。

その間の距離は台形の面積 $\frac{1}{2} \left(v_0 + \frac{v_0}{2} \right) \cdot \frac{T}{2} = \frac{3v_0T}{8}$

$$\frac{3v_0T/8}{v_0T/2} = \frac{3}{4} \rightarrow \frac{3}{4} \text{ 倍}$$

前半のほうが速いので、半分より多く進む。

答 (1) $L = \frac{v_0T}{2}$ (2) $\frac{v_0}{T}$ (3) $\frac{3}{4}$ 倍

パターン 2 運動方程式 (1 物体) —— 力を描いて 1 方向に射影する

2-1 垂直方向のつり合いから N を出す

■(1) 鉛直方向は動かないのでつり合い $N = mg$

■(2) 水平方向に運動方程式 (引く向きを正)

$$ma = F - \mu' N = F - \mu' mg$$
$$a = \frac{F - \mu' mg}{m} = \frac{F}{m} - \mu' g$$

■(3) 動き出さない条件は $F \leq \mu' mg$

(このとき摩擦力は $\mu' mg$ ではなく F に等しい —— 静止摩擦は必要なだけ出る。)

答 (1) $N = mg$ (2) $a = \frac{F}{m} - \mu' g$ (3) $F \leq \mu' mg$

2-2 斜面方向と垂直方向に分ける

■(1) 斜面下向きを正として運動方程式

$$ma = mg \sin \theta \rightarrow a = g \sin \theta \text{ (質量によらない)}$$

■(2) 斜面に垂直な向きはつり合い

$$N = mg \cos \theta$$

■(3) $\theta \rightarrow 90^\circ$ で $a \rightarrow g$ 、 $N \rightarrow 0$ 。

斜面が垂直になれば自由落下になり、面から受ける力はなくなる —— 式が正しいことの確認になる。

答 (1) $a = g \sin \theta$ (2) $N = mg \cos \theta$ (3) $a \rightarrow g$ 、 $N \rightarrow 0$ (自由落下)

2-3 N は mg とは限らない

■(1) 人にはたらく力は重力 mg (下向き) と垂直抗力 N (上向き)。上向きを正として

$$ma = N - mg \rightarrow N = m(g + a)$$

■(2) $a = 0$ なら $N = mg$ 。等速で上昇していても同じ (速度ではなく加速度が効く)。

■(3) $N = 0$ となるのは $a = -g$ 、つまり自由落下しているとき。

これが無重量状態で、重力がなくなったわけではない。

答 (1) $N = m(g + a)$ (2) $N = mg$ (3) $a = -g$ (自由落下のとき)

2-4 静止=aが0の運動方程式

静止しているので、水平・鉛直とも力が釣り合う。

■鉛直： $T \cos \theta = mg \rightarrow T = \frac{mg}{\cos \theta}$

■水平： $T \sin \theta = F \rightarrow F = mg \tan \theta$

■(3) F を大きくすると θ も大きくなるが、 $\tan 90^\circ$ は無限大なので有限の F では 90° にならない。糸が水平になることはない。

(同じ理由で、たるんだロープを完全に水平に張ることはできない。)

答 (1) $T = \frac{mg}{\cos \theta}$ (2) $F = mg \tan \theta$ (3) 近づくが 90° にはならない

2-5 等速なので a = 0

■(1) 等速なので $a = 0$ 。摩擦は運動と逆（斜面向下向き）にはたらく

$$F = mg \sin \theta + \mu' mg \cos \theta = mg(\sin \theta + \mu' \cos \theta)$$

■(2) 下ろすときは摩擦の向きが逆（斜面上向き）になる

$$F = mg \sin \theta - \mu' mg \cos \theta = mg(\sin \theta - \mu' \cos \theta)$$

■(3) $\tan \theta = \mu'$ なら $\sin \theta = \mu' \cos \theta$ なので $F = 0$ 。

力を加えなくても一定の速さで滑り続ける状態で、これがちょうど滑り出す角度にあたる。

答 (1) $mg(\sin \theta + \mu' \cos \theta)$ (2) $mg(\sin \theta - \mu' \cos \theta)$ (3) $F = 0$ (滑り出す限界の角)

パターン 3 連結体 —— まとめて → 1つずつ

3-1 全体→片方だけ

■(1) 全体を1つとみなす（接触力は内力なので消える）

$$(m_1 + m_2)a = F \rightarrow a = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

■(2) m_2 だけを取り出す。はたらく水平の力は接触力 N だけ

$$m_2 a = N \rightarrow N = \frac{m_2 F}{m_1 + m_2}$$

■(3) 今度は m_1 だけを取り出すので

$$N' = \frac{m_1 F}{m_1 + m_2}$$

押す側を変えると接触力が変わる ($m_1 \neq m_2$ なら値が違う)。

答 (1) $a = \frac{F}{m_1 + m_2}$ (2) $\frac{m_2 F}{m_1 + m_2}$ (3) $\frac{m_1 F}{m_1 + m_2}$ に変わる

3-2 向きを別々に決めてよい

m_1 は下向き、 m_2 は上向きを正とする（加速度の大きさは共通）。

$$m_1 a = m_1 g - T \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \quad m_2 a = T - m_2 g \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

■(1) ①+②で T が消える

$$(m_1 + m_2)a = (m_1 - m_2)g \rightarrow a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2}$$

■(2) ②に戻して

$$T = m_2(g + a) = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$$

■(3) $a = 0$ 、 $T = m_1 g$ 。つり合って静止したままになる。

$$\text{答 (1) } a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2} \quad \text{(2) } T = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} \quad \text{(3) } a = 0, T = m_1 g$$

3-3 重力が効くのは片方だけ

■全体で見ると、動かす原因になっているのは m_2 にはたらく重力だけ

$$(m_1 + m_2)a = m_2 g \rightarrow a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2}$$

■ m_1 だけを取り出すと、水平にはたらくのは張力だけ

$$T = m_1 a = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$$

■(3) $m_1 \rightarrow 0$ で $a \rightarrow g$ 。

つながっている相手がなくなり、 m_2 が自由落下する状態に近づく。

$$\text{答 (1) } a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2} \quad \text{(2) } T = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} \quad \text{(3) } a \rightarrow g$$

3-4 向きの判定が入る

■ m_2 が下がる向きを正とする

$$m_2 : m_2 a = m_2 g - T \quad m_1 : m_1 a = T - m_1 g \sin \theta$$

辺々足して

$$a = \frac{(m_2 - m_1 \sin \theta)g}{m_1 + m_2}$$

■(2) $a = 0$ となる条件なので

$$m_2 = m_1 \sin \theta$$

斜面のぶん m_1 が「軽くなって」つり合う。

■(3) $\theta = 90^\circ$ なら $\sin \theta = 1$ で

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2} \quad \text{—— 定滑車（アトウッド）の式に一致する。}$$

斜面を垂直にすれば両方ぶら下がった状態になるので、当然そうなる。

$$\text{答 (1) } a = \frac{(m_2 - m_1 \sin \theta)g}{m_1 + m_2} \quad \text{(2) } m_2 = m_1 \sin \theta \quad \text{(3) 定滑車の式になる}$$

3-5 どこで切るかを選ぶ

■(1) $a = \frac{F}{m_1 + m_2 + m_3}$

■(2) 糸で切って、後ろ側をまとめて見るのが速い。

T_1 は m_2 と m_3 を引いているので

$$T_1 = (m_2 + m_3)a = \frac{(m_2 + m_3)F}{m_1 + m_2 + m_3}$$

■(3) T_2 は m_3 だけを引いている

$$T_2 = m_3a = \frac{m_3F}{m_1 + m_2 + m_3}$$

■(4) $T_1 > T_2$ 。

前の糸ほど多くの質量を引いているから。列車の連結器も、機関車に近いほど大きな力がかかる。

答 (1) $\frac{F}{\Sigma m}$ (2) $\frac{(m_2 + m_3)F}{\Sigma m}$ (3) $\frac{m_3F}{\Sigma m}$ (4) $T_1 > T_2$

パターン 4 摩擦 —— 静止か滑るかを先に判定する

4-1 $\tan \theta = \mu$

■(1) 斜面方向のつり合いに必要な摩擦力は $f = mg \sin \theta$

最大静止摩擦力は $\mu N = \mu mg \cos \theta$

$$mg \sin \theta \leq \mu mg \cos \theta \rightarrow \tan \theta \leq \mu$$

■(2) 両辺に共通の mg が現れて約分で消えるから。

重い物体は滑らせる力 ($mg \sin \theta$) も大きい、押しつける力 ($mg \cos \theta$) も同じだけ大きくなるので、差し引きで質量の効果が消える。

答 (1) $\tan \theta \leq \mu$ (2) 両辺の mg が消えるから

4-2 最大静止摩擦を超えるか

■(1) $N = mg$ なので、最大静止摩擦力は μmg

動き出す条件は $F > \mu mg$

■(2) $F = \frac{\mu mg}{2}$ のときはまだ静止している。

静止摩擦力はつり合いに必要なだけ出るので

$$f = F = \frac{\mu mg}{2}$$

μmg ではない。ここが最頻出の誤り。

答 (1) $F > \mu mg$ (2) $f = \frac{\mu mg}{2}$ (加えた力に等しい)

4-3 必要なだけ出る

■(1) 斜面方向のつり合いより

大きさ $mg \sin \theta$ 、向きは斜面上向き（ずり落ちるのを妨げる向き）。

■(2) 動かそうとする向きと逆になるので、斜面下向きに変わる。

静止摩擦力は向きも大きさも状況で変わる。

■(3) $\theta \rightarrow 0$ で $f \rightarrow 0$ 。水平面に置いた物体には摩擦力ははたらない（押していないかぎり）。

答 (1) $mg \sin \theta$ ・斜面上向き (2) 斜面下向きに変わる (3) 0 に近づく

4-4 N が変わることに注意

■(1) 鉛直方向のつり合い。 F の鉛直成分が持ち上げる向きにはたらく

$$N = mg - F \sin \alpha$$

■(2) 水平成分が最大静止摩擦力を超えればよい

$$F \cos \alpha > \mu N = \mu(mg - F \sin \alpha)$$

$$F(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) > \mu mg \rightarrow F > \frac{\mu mg}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}$$

■(3) 斜めに引くと水平成分は減るが、同時に垂直抗力も減って摩擦力が小さくなる。

後者の効果が勝つ角度があるので、真横に引くより楽になることがある。（荷物を引くとき少し持ち上げ気味にするのはこのため。）

答 (1) $N = mg - F \sin \alpha$ (2) $F > \frac{\mu mg}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}$ (3) 垂直抗力が減って摩擦力も減るから

4-5 動摩擦に切り替える

■(1) 滑っているので動摩擦力 $\mu' N$ に置き換える

$$ma = mg \sin \theta - \mu' mg \cos \theta$$

$$a = g(\sin \theta - \mu' \cos \theta)$$

■(2) 時間が問われていないので $v^2 - v_0^2 = 2ax$ ($v_0 = 0$)

$$v = \sqrt{2aL} = \sqrt{2gL(\sin \theta - \mu' \cos \theta)}$$

■(3) 運動方程式の右辺の力がすべて mg に比例しているので、 m で割った時点ですべて約分されて消えるから。

答 (1) $g(\sin \theta - \mu' \cos \theta)$ (2) $\sqrt{2gL(\sin \theta - \mu' \cos \theta)}$ (3) 力がすべて mg に比例するから

パターン 5 剛体 —— 軸を選んで未知数を消す

5-1 軸を端に取る

■(1) 右端を軸にとると N_R が消える。

棒の重力は右端から $\frac{L}{2}$ 、おもりは右端から $L - a$ の位置。

$$N_L \cdot L = Mg \cdot \frac{L}{2} + mg(L - a)$$

$$N_L = \frac{Mg}{2} + \frac{mg(L - a)}{L}$$

■(2) 鉛直方向のつり合い

$$N_R = (M + m)g - N_L = \frac{Mg}{2} + \frac{mga}{L}$$

■(3) おもりを右へ動かすと N_L は減り、 N_R は増える。

和はつねに $(M + m)g$ で一定。

答 (1) $\frac{Mg}{2} + \frac{mg(L - a)}{L}$ (2) $\frac{Mg}{2} + \frac{mga}{L}$ (3) N_L は減り N_R は増える

5-2 床の接点を軸に

力は4つ：重力 Mg （中点）、床の垂直抗力 N と摩擦力 f 、壁の垂直抗力 N' 。

■鉛直： $N = Mg$ / 水平： $f = N'$

■(1) 床との接点を軸にとる (N と f が消える)

$$N' \cdot L \sin \theta = Mg \cdot \frac{L}{2} \cos \theta$$

$$N' = \frac{Mg}{2 \tan \theta}$$

■(2) 滑らない条件 $f \leq \mu N$

$$\frac{Mg}{2 \tan \theta} \leq \mu Mg \rightarrow \tan \theta \geq \frac{1}{2\mu}$$

■(3) 式の両辺に Mg が共通で現れて消え、 L もモーメントの式で両辺に現れて消えるから。

長いはしごでも短いはしごでも、立てかけられる角度は同じ。

答 (1) $N' = \frac{Mg}{2 \tan \theta}$ (2) $\tan \theta \geq \frac{1}{2\mu}$ (3) Mg と L が両辺で消えるから

5-3 蝶番を軸に

■蝶番を軸に取る（蝶番からの力が消える）。

糸の力のうち、棒に垂直な成分 $T \sin \theta$ だけがモーメントを生む。

$$T \sin \theta \cdot L = Mg \cdot \frac{L}{2}$$

$$T = \frac{Mg}{2 \sin \theta}$$

■(2) $\theta \rightarrow 0$ で $T \rightarrow \infty$ 。

糸を棒に近い角度で張るほど、必要な張力が急激に大きくなる。

だから支える糸はできるだけ立てて張る。

答 (1) $T = \frac{Mg}{2 \sin \theta}$ (2) 急激に大きくなる ($\theta \rightarrow 0$ で無限大)

5-4 負の質量として足す

■面密度を 1 として、切り取った部分を負の質量として扱う。

元の板：質量 a^2 、重心 $\frac{a}{2}$

切り取る部分：質量 $\frac{a^2}{4}$ 、重心 $\frac{3a}{4}$ （原点から遠い隅）

$$x_G = \frac{a^2 \cdot \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4} \cdot \frac{3a}{4}}{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\frac{a^3}{2} - \frac{3a^3}{16}}{\frac{3a^2}{4}} = \frac{5a}{12}$$

■(2) x 軸と y 軸について配置が対称なので、 y_G も同じ $\frac{5a}{12}$ 。

元の重心 $\frac{a}{2}$ より原点側へ寄っていることを確認する。

答 (1) $x_G = \frac{5a}{12}$ (2) y_G も同じ値

5-5 モーメントに位置が入る

■床との接点を軸に取る。うでは水平距離なので $\cos \theta$ がつく。

$$N' \cdot L \sin \theta = Mg \cdot \frac{L}{2} \cos \theta + mg \cdot x \cos \theta$$
$$N' = \frac{\left(\frac{ML}{2} + mx\right)g}{L \tan \theta}$$

■(2) 鉛直つり合い $N = (M + m)g$ 、水平つり合い $f = N'$ 。

滑らない条件 $f \leq \mu N$ より

$$\frac{\left(\frac{ML}{2} + mx\right)g}{L \tan \theta} \leq \mu(M + m)g$$
$$x \leq \frac{\mu(M + m)L \tan \theta - \frac{ML}{2}}{m}$$

■(3) x が大きいほど左辺（必要な摩擦係数）が増えるのに、右辺（出せる最大摩擦係数）は x によらず一定だから。上に行くほど余裕がなくなり、ある高さで限界を超える。

答 (1) $N' = \frac{(ML/2 + mx)g}{L \tan \theta}$ (2) $x \leq \frac{\mu(M + m)L \tan \theta - ML/2}{m}$ (3) 必要な摩擦係数だけが増えるから

パターン 6 仕事とエネルギー —— 非保存力の有無で式を選ぶ

6-1 経路によらない

■(1) なめらかなので力学的エネルギー保存

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

■(2) 重力は保存力で、その仕事は始点と終点の高さの差だけで決まるから。

また、面からの垂直抗力はつねに運動方向と垂直なので仕事をしない。

だから途中の形はいっさい効かない。

■(3) 式に m が残らないので 1 倍（変わらない）。

答 (1) $v = \sqrt{2gh}$ (2) 重力の仕事が高さの差だけで決まり、垂直抗力は仕事をしないから (3) 1 倍

6-2 運動エネルギー＝摩擦熱

■(1) はじめの運動エネルギーがすべて摩擦熱になる

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \mu' mg d \rightarrow d = \frac{v_0^2}{2\mu' g}$$

■(2) $d \propto v_0^2$ なので 4 倍。

■(3) 左辺も右辺もともに m に比例しているので約分で消えるから。

重い物体は運動エネルギーも大きいけど、摩擦係数も同じだけ大きくなる。

答 (1) $d = \frac{v_0^2}{2\mu' g}$ (2) 4 倍 (3) 両辺とも m に比例するから

6-3 弾性エネルギー→運動エネルギー

$$\blacksquare(1) \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v = x\sqrt{\frac{k}{m}}$$

■(2) $v \propto x$ なので 2 倍。

■(3) $v \propto \frac{1}{\sqrt{m}}$ なので $\frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$ 倍。

エネルギーは同じでも、重い物体ほど遅くしか出ない。

答 (1) $v = x\sqrt{\frac{k}{m}}$ (2) 2倍 (3) 1/2 倍

6-4 高さが熱に変わる

■(1) 斜面はなめらかなので $v = \sqrt{2gh}$

■(2) はじめの位置エネルギーがそのまま摩擦熱になると考えると速い

$$mgh = \mu' mgd \rightarrow d = \frac{h}{\mu'}$$

m も g も消える。

■(3) $d \propto \frac{1}{\mu'}$ なので 2 倍になる。

答 (1) $\sqrt{2gh}$ (2) $d = \frac{h}{\mu'}$ (3) 2倍

6-5 外力の仕事=位置E+摩擦熱

■(1) 斜面に沿った距離を s とすると $h = s \sin \theta$ より $s = \frac{h}{\sin \theta}$

■(2) 等速なので運動エネルギーは変わらない。加えた仕事は位置エネルギーの増加と摩擦熱に分かれる。

$$\begin{aligned} \text{摩擦熱} &= \mu' mg \cos \theta \times \frac{h}{\sin \theta} = \frac{\mu' mgh}{\tan \theta} \\ W &= mgh + \frac{\mu' mgh}{\tan \theta} = mgh \left(1 + \frac{\mu'}{\tan \theta} \right) \end{aligned}$$

■(3) $\theta \rightarrow 90^\circ$ で $\tan \theta \rightarrow \infty$ となり、 $W \rightarrow mgh$ 。

真上に持ち上げれば摩擦は関係なくなる（面に押しつけないので）。

逆に斜面をゆるくするほど、摩擦のために余計な仕事要る。

答 (1) $\frac{h}{\sin \theta}$ (2) $W = mgh \left(1 + \frac{\mu'}{\tan \theta} \right)$ (3) mgh に近づく（摩擦の損失が消える）

パターン 7 力積と運動量保存 —— 「一瞬」の出来事

7-1 向きが逆になるので足す

■跳ね返る向きを正とすると、速度は $-v$ から $+v'$ に変わった。

■(1) $|\Delta p| = mv' - m(-v) = m(v + v')$

向きが逆になるときは足す。引くと大きく外す。

■(2) $F = \frac{m(v + v')}{t}$

■(3) 壁は止まっているので

$$e = \frac{v'}{v}$$

答 (1) $m(v + v')$ (2) $F = \frac{m(v + v')}{t}$ (3) $e = \frac{v'}{v}$

7-2 $Ft = \Delta p$

■(1) $Ft = mv - 0 \rightarrow v = \frac{Ft}{m}$

■(2) 加速度 $a = \frac{F}{m}$ の等加速度運動なので

$$x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{Ft^2}{2m}$$

■(3) $v \propto t$ なので速さは 2 倍、

$x \propto t^2$ なので距離は 4 倍。

力積は時間に比例、仕事は距離に比例という違いがここに出る。

答 (1) $v = \frac{Ft}{m}$ (2) $x = \frac{Ft^2}{2m}$ (3) 速さ2倍・距離4倍

7-3 完全非弾性衝突

■(1) 運動量保存 $mv = (m + M)V \rightarrow V = \frac{mv}{m + M}$

■(2) 前: $\frac{1}{2}mv^2$ 後: $\frac{1}{2}(m + M)V^2 = \frac{m^2v^2}{2(m + M)}$

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{m^2v^2}{2(m + M)} = \frac{mv^2}{2} \left(1 - \frac{m}{m + M} \right) = \frac{mMv^2}{2(m + M)}$$

■(3) $M \gg m$ なら $\frac{M}{m + M} \rightarrow 1$ なので、失われるエネルギーは $\frac{1}{2}mv^2$ に近づく —— ほぼ全部 (10割)。

壁にぶつけて止まるのと同じで、運動エネルギーはほとんど熱になる。

答 (1) $V = \frac{mv}{m + M}$ (2) $\frac{mMv^2}{2(m + M)}$ (3) ほぼ全部 (もとの運動エネルギーに近づく)

7-4 はじめの運動量が 0

■(1) はじめの運動量が 0 なので、分裂後の運動量の和も 0

$$0 = mv + (M - m)V \rightarrow V = -\frac{mv}{M - m}$$

大きさ $\frac{mv}{M - m}$ で、向きは m と逆。

$$\blacksquare(2) K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(M - m)V^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{m^2v^2}{2(M - m)} = \frac{Mmv^2}{2(M - m)}$$

■(3) 運動量の大きさが等しく p とすると $K = \frac{p^2}{2m}$ なので

$$K_1 : K_2 = \frac{1}{m} : \frac{1}{M - m} = (M - m) : m$$

軽いほうが大きなエネルギーをもつ。銃の反動が銃弾より小さいのはこれ。

$$\text{答 (1) } \frac{mv}{M - m} \cdot \text{逆向き} \quad (2) \frac{Mmv^2}{2(M - m)} \quad (3) (M - m) : m$$

7-5 相対速度+運動量保存

■台車の（地面に対する）速度を V 、人が歩く向きを正とすると、人の地面に対する速度は $V + u$ 。

はじめ全体は静止していたので運動量保存

$$0 = MV + m(V + u) \rightarrow V = -\frac{mu}{M + m}$$

■(1) 大きさ $\frac{mu}{M + m}$ 、向きは人と逆。

$$\blacksquare(2) V + u = u - \frac{mu}{M + m} = \frac{Mu}{M + m}$$

■(3) $M \rightarrow \infty$ で台車は 0、人は u に近づく。

台車が重ければ「地面の上を歩く」と同じになる —— 式が正しいことの確認になる。

$$\text{答 (1) } \frac{mu}{M + m} \text{ (人と逆向き)} \quad (2) \frac{Mu}{M + m} \quad (3) \text{ 台車は0、人は } u \text{ に近づく}$$

パターン 8 2段階問題 —— 一瞬は運動量、そのあとはエネルギー

8-1 運動量→エネルギー

■(1) 撃ち込まれる一瞬は運動量保存

$$mv = (m + M)V \rightarrow V = \frac{mv}{m + M}$$

■(2) そのあとはゆっくり振れ上がるので力学的エネルギー保存

$$\frac{1}{2}(m + M)V^2 = (m + M)gh$$
$$h = \frac{V^2}{2g} = \frac{m^2v^2}{2g(m + M)^2}$$

■(3) はじめは $\frac{1}{2}mv^2$ 、位置エネルギーになったのは $\frac{1}{2}(m + M)V^2 = \frac{m^2v^2}{2(m + M)}$

$$\text{割合} = \frac{m}{m + M}$$

残りは弾丸が木片にめり込むときに熱になった。

$$\text{答 (1)} V = \frac{mv}{m + M} \quad \text{(2)} h = \frac{m^2v^2}{2g(m + M)^2} \quad \text{(3)} \frac{m}{m + M}$$

8-2 境目でつなぐ

■(1) $V = \frac{mv}{m + M}$

■(2) そのあとは運動エネルギーが摩擦熱になる

$$\frac{1}{2}(m + M)V^2 = \mu'(m + M)gd$$
$$d = \frac{V^2}{2\mu'g} = \frac{m^2v^2}{2\mu'g(m + M)^2}$$

((m + M) が約分で消えることに注意。)

■(3) $d \propto v^2$ なので 4 倍。

$$\text{答 (1)} \frac{mv}{m + M} \quad \text{(2)} d = \frac{m^2v^2}{2\mu'g(m + M)^2} \quad \text{(3)} 4\text{倍}$$

8-3 エネルギー→運動量の順もある

■(1) 落下中はエネルギー保存 $v = \sqrt{2gh}$

■(2) 衝突の一瞬は運動量保存

$$V = \frac{mv}{m + M} = \frac{m\sqrt{2gh}}{m + M}$$

■(3) 先にエネルギー保存 (落下)、あとで運動量保存 (衝突)。

順番は問題によって入れ替わる。決めるのは「その区間が一瞬かどうか」であって、法則の順番そのものではない。

$$\text{答 (1)} \sqrt{2gh} \quad \text{(2)} \frac{m\sqrt{2gh}}{m + M} \quad \text{(3) エネルギー保存が先、運動量保存があと}$$

8-4 3段階になる

$$\blacksquare(1) \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v = x\sqrt{\frac{k}{m}}$$

■(2) 運動量保存と $e = 1$ を連立した結果 (覚えておくと速い)

$$v'_M = \frac{2mv}{m+M} = \frac{2mx}{m+M}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

■(3) $m = M$ を代入すると $v'_M = v$ 、そして $v'_m = 0$ 。

速度がそっくり入れ替わる。撞球 (ビリヤード) でよく見る現象。

答 (1) $x\sqrt{\frac{k}{m}}$ (2) $\frac{2mv}{m+M}$ (v は(1)の値) (3) 速度が入れ替わる (m は静止する)

8-5 エネルギー→衝突→エネルギー

■(1) 水平から放すので落下する高さは l

$$v = \sqrt{2gl}$$

■(2) 運動量保存と反発係数の式を連立した結果

$$v'_M = \frac{(1+e)mv}{m+M} = \frac{(1+e)m\sqrt{2gl}}{m+M}$$

■(3) $e = 0$ で $v'_M = \frac{m\sqrt{2gl}}{m+M}$ 。

これは合体したときの共通の速さそのもの。

$e = 0$ は「離れない=一体になる」という意味なので、つじつまが合っている。

答 (1) $\sqrt{2gl}$ (2) $\frac{(1+e)m\sqrt{2gl}}{m+M}$ (3) 合体したときの速さになる

パターン 9 円運動 —— 向心方向に運動方程式

9-1 張力がそのまま向心力

■(1) 水平面内なので重力は円運動に関係しない。中心を向く力は張力だけ

$$T = \frac{mv^2}{l}$$

■(2) $\omega = \frac{v}{l}$ 、 $T_{\text{周期}} = \frac{2\pi l}{v}$

■(3) 0。張力はつねに速度と垂直なので $W = Fx \cos 90^\circ = 0$ 。

だから等速円運動では速さが変わらない。

答 (1) $\frac{mv^2}{l}$ (2) $\omega = \frac{v}{l}$ 、 $T = \frac{2\pi l}{v}$ (3) 0 (速度と垂直だから)

9-2 鉛直はつり合い・水平は円運動

■鉛直方向は動かないのでつり合い

$$T \cos \theta = mg \rightarrow T = \frac{mg}{\cos \theta}$$

■半径は $r = l \sin \theta$

■水平方向は円運動の運動方程式

$$T \sin \theta = mr\omega^2 = ml \sin \theta \cdot \omega^2$$

$$\frac{mg}{\cos \theta} \sin \theta = ml \sin \theta \omega^2 \rightarrow \omega^2 = \frac{g}{l \cos \theta}$$

$$T_{\text{周期}} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \theta}{g}}$$

質量が消える。また θ が大きいほど周期は短くなる。

$$\text{答 (1)} \frac{mg}{\cos \theta} \quad \text{(2)} l \sin \theta \quad \text{(3)} 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \theta}{g}}$$

9-3 摩擦が向心力になる

$$\text{■(1)} F = \frac{mv^2}{r}$$

■(2) タイヤと路面の間の静止摩擦力。

「向心力」という別の力があるのではなく、摩擦力がその役目をしている。

■(3) 摩擦力の上限は μmg なので

$$\frac{mv^2}{r} \leq \mu mg \rightarrow v \leq \sqrt{\mu gr}$$

質量が消えるので、大型車でも軽自動車でも限界の速さは同じ。

$$\text{答 (1)} \frac{mv^2}{r} \quad \text{(2) 静止摩擦力} \quad \text{(3)} v \leq \sqrt{\mu gr}$$

9-4 $v = r\omega$ を使い分ける

$$\text{■(1)} a = r\omega^2 \quad \text{■(2)} F = mr\omega^2$$

■(3) $F \propto r$ (ω 一定) なので 2 倍

$$\text{■(4)} F = \frac{mv^2}{r} \propto \frac{1}{r} \quad (v \text{ 一定}) \text{ なので } \frac{1}{2} \text{ 倍}$$

同じ「半径2倍」でも、何を一定に保つかで答えが逆になる。

どちらの式を使うかは「 ω が一定か v が一定か」で決める。

$$\text{答 (1)} r\omega^2 \quad \text{(2)} mr\omega^2 \quad \text{(3) 2倍} \quad \text{(4) 1/2 倍}$$

9-5 垂直抗力を分解する

■(1) 重力 mg と 路面からの垂直抗力 N の2つだけ（摩擦なし）。

■(2) 垂直抗力は路面に垂直なので、鉛直から θ 傾いている。

鉛直方向（つり合い）： $N \cos \theta = mg$

水平方向（円運動）： $N \sin \theta = \frac{mv^2}{r}$

辺々割ると N が消えて

$$\tan \theta = \frac{v^2}{gr} \rightarrow v = \sqrt{gr \tan \theta}$$

■(3) 2式とも両辺が m に比例していて、割り算で消えるから。

だからバンクは車種を問わず同じ設計でよい。

答 (1) 重力と垂直抗力 (2) $v = \sqrt{gr \tan \theta}$ (3) 2式とも m に比例し、割ると消えるから

パターン 10 鉛直円運動 —— 運動方程式とエネルギー保存の2本立て

10-1 エネルギー保存だけ

■(1) 最下点から最高点までの高さの差は $2l$ 。

糸の張力はつねに速度と垂直で仕事をしないので、力学的エネルギー保存が使える。

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_t^2 + mg(2l)$$

$$v_t = \sqrt{v_0^2 - 4gl}$$

■(2) 根号の中が 0 以上でなければならないので

$$v_0^2 \geq 4gl$$

ただしこれだけでは1周できない（次問）。

答 (1) $v_t = \sqrt{v_0^2 - 4gl}$ (2) $v_0^2 \geq 4gl$

10-2 $T \geq 0$

■(1) 最高点では重力も張力もどちらも中心（下）を向く

$$mg + T = \frac{mv_t^2}{l}$$

$$\text{■(2) } T = \frac{mv_t^2}{l} - mg \geq 0 \rightarrow v_t^2 \geq gl$$

■(3) 糸は引く力しか出せない（押せない）から。

速さが足りないと、円軌道を保つのに必要な向心力が重力より小さくなり、 $T < 0$ というあり得ない状況になる。実際には糸がたるみ、球は円から外れて落ちる。

答 (1) $mg + T = \frac{mv_t^2}{l}$ (2) $v_t^2 \geq gl$ (3) 糸は押す力を出せないから

10-3 2本を連立

■(1) 最高点の条件 $v_t^2 = gl$ と、エネルギー保存 $v_0^2 = v_t^2 + 4gl$ を連立

$$v_0^2 = gl + 4gl = 5gl \rightarrow v_0 = \sqrt{5gl}$$

■(2) 最下点では張力が上向き（中心向き）、重力が下向き

$$T - mg = \frac{mv_0^2}{l} = \frac{m \cdot 5gl}{l} = 5mg$$

$$T = 6mg$$

最下点では重さの6倍の張力がかかる。糸の強度を考えるとときに効いてくる。

答 (1) $v_0 = \sqrt{5gl}$ (2) $T = 6mg$

10-4 糸を面に変える

■最高点の速さは $v_t^2 = v_0^2 - 4gr$

■(1) 最高点では重力も垂直抗力も中心（下）向き

$$mg + N = \frac{mv_t^2}{r}$$
$$N = \frac{m(v_0^2 - 4gr)}{r} - mg = m \left(\frac{v_0^2}{r} - 5g \right)$$

■(2) $N \geq 0$ より $v_0^2 \geq 5gr$

■(3) 面（内側）も糸と同じで、押す力しか／引く力しか出せないという点で同じ制約になるから。

内側の面は中心向きに押すことしかできず、 $N < 0$ （引っばる）はあり得ない。

一方、棒やレールなら押しも引きもできるので、条件は $v_t \geq 0$ に緩む。

答 (1) $N = m \left(\frac{v_0^2}{r} - 5g \right)$ (2) $v_0^2 \geq 5gr$ (3) 面も中心向きにしか力を出せないから

10-5 $N = 0$ になる点を探す

■(1) 下がった高さは $R(1 - \cos \theta)$ 。エネルギー保存より

$$\frac{1}{2}v^2 = gR(1 - \cos \theta) \rightarrow v^2 = 2gR(1 - \cos \theta)$$

■(2) 中心向きは球の中心を向く向き。重力の中心向き成分は $mg \cos \theta$ 、垂直抗力 N は外向きなので

$$mg \cos \theta - N = \frac{mv^2}{R}$$

■(3) 面から離れるのは $N = 0$ のとき

$$mg \cos \theta = \frac{m \cdot 2gR(1 - \cos \theta)}{R} = 2mg(1 - \cos \theta)$$
$$\cos \theta = 2 - 2 \cos \theta \rightarrow 3 \cos \theta = 2 \rightarrow \cos \theta = \frac{2}{3}$$

質量にも半径にもよらない。どんな球でも同じ角度で離れる。

答 (1) $v^2 = 2gR(1 - \cos \theta)$ (2) $mg \cos \theta - N = \frac{mv^2}{R}$ (3) $\cos \theta = \frac{2}{3}$

パターン 11 単振動 —— $ma = -Kx$ の形にして周期を読む

11-1 $K = k$ がそのまま読める

■(1) ばねの弾性力はずねに自然長に戻る向き

$$ma = -kx$$

■(2) $ma = -Kx$ と比べて $K = k$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

■(3) 式に A が入っていないので 1 倍 (変わらない)。

これが単振動の等時性。振れ幅が変わっても周期は同じ。

答 (1) $ma = -kx$ (2) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ (3) 1 倍 (変わらない)

11-2 中心はつり合いの位置

■(1) つり合いの条件 $kd = mg \rightarrow d = \frac{mg}{k}$

■(2) つり合いの位置からさらに x 下がった状態では、ばねの伸びは $d + x$

下向きを正として

$$ma = mg - k(d + x) = mg - kd - kx$$

$$mg = kd \text{ なので重力の項が消えて}$$

$$ma = -kx$$

■(3) $K = k$ なので $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ 。水平の場合とまったく同じ。

重力は振動の中心をずらすだけで、周期には影響しない。

答 (1) $\frac{mg}{k}$ (2) $ma = -kx$ (3) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ で水平と同じ

11-3 t が出てこない

■(1) 問題文に時刻 t が出てこないで、 t を含まない式を選ぶ。

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}KA^2 \quad (K = m\omega^2) \text{ より}$$

$$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

$$\text{■(2) } v = \omega\sqrt{A^2 - \frac{A^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}A\omega$$

中心での速さ $A\omega$ の約 87%。半分まで来てもまだかなり速い。

$$\text{■(3) } \frac{A\omega}{2} = \omega\sqrt{A^2 - x^2} \rightarrow A^2 - x^2 = \frac{A^2}{4}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}A \text{ (端にかなり近い)}$$

答 (1) $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}A\omega$ (3) $x = \frac{\sqrt{3}}{2}A$

11-4 K を読み取る

■(1) 振れ角が小さいとき、復元力は $mg \sin \theta \approx mg\theta = \frac{mg}{l}x$

$$ma = -\frac{mg}{l}x \text{ の形なので } K = \frac{mg}{l}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

■(2) $T \propto \sqrt{l}$ なので 2 倍

■(3) 式に m が入っていないので 1 倍 (変わらない)。

K が m に比例するので、 $\frac{m}{K}$ で約分されて消える。

答 (1) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ (2) 2倍 (3) 1倍 (変わらない)

11-5 K を作り直す

■(1) 並列では変位が同じで力が足し算になる

$$F = -(k_1 + k_2)x \rightarrow K = k_1 + k_2$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$$

■(2) 直列では力が同じで伸びが足し算になる

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \rightarrow K = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}$$

■(3) 並列のほうが K が大きい (かたい) ので 並列のほうが周期が短い。

「かたいばねほど速く振動する」という直感と一致する。

答 (1) $2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$ (2) $2\pi\sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}$ (3) 並列

パターン 12 万有引力 —— 円軌道の条件とエネルギー保存

12-1 引力=向心力

■(1) 万有引力が向心力そのもの

$$G\frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$\text{■(2) } T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi r \sqrt{\frac{r}{GM}} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

($T^2 \propto r^3$ —— ケプラーの第3法則がここから出る。)

■(3) 両辺とも衛星の質量 m に比例しているので、割り算で消えるから。

重い衛星ほど強く引かれるが、動かしにくさも同じだけ増える。

答 (1) $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ (2) $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$ (3) 両辺が m に比例して消えるから

12-2 GM = gR² で消す

■(1) 地表では万有引力が重力に等しい

$$G \frac{Mm}{R^2} = mg \rightarrow GM = gR^2$$

$$\blacksquare(2) v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{gR^2}{R}} = \sqrt{gR}$$

$$\blacksquare(3) T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$$

G も M も知らなくてよいのがこの置き換えの威力。

(形が単振り子の周期 $2\pi\sqrt{l/g}$ とそっくりなのも覚えやすい。)

$$\text{答 (1)} GM = gR^2 \quad \text{(2)} v = \sqrt{gR} \quad \text{(3)} T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

12-3 無限遠で v = 0

■(1) 無限遠で速さ 0、位置エネルギー 0 となるのが最小条件

$$\frac{1}{2}mv^2 - G \frac{Mm}{R} = 0$$

$GM = gR^2$ を代入して

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{gR^2}{R} = gR \rightarrow v = \sqrt{2gR}$$

■(2) 第一宇宙速度は $\sqrt{gR}$ なので $\sqrt{2}$ 倍 (約 1.4 倍)。

■(3) ならない。式に m が残らない (両辺の m が消える)。

重いロケットでも必要な速さは同じ (必要なエネルギーは質量に比例して増える)。

$$\text{答 (1)} v = \sqrt{2gR} \quad \text{(2)} \sqrt{2} \text{ 倍} \quad \text{(3) ならない (質量によらない)}$$

12-4 円軌道の全エネルギー

$$\blacksquare(1) \frac{mv^2}{r} = G \frac{Mm}{r^2} \text{ より } mv^2 = \frac{GMm}{r}$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r}$$

$$\blacksquare(2) E = K + U = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r}$$

全エネルギーは負 (束縛されている証拠)。

$$\blacksquare(3) \Delta E = -\frac{GMm}{2r_2} - \left(-\frac{GMm}{2r_1}\right) = \frac{GMm}{2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$r_2 > r_1$ なので正 —— 外側の軌道へ上げるにはエネルギーが要る。

ただし外側のほうが速さは遅い ($v \propto 1/\sqrt{r}$) という点に注意。

$$\text{答 (1)} \frac{GMm}{2r} \quad \text{(2)} -\frac{GMm}{2r} \quad \text{(3)} \frac{GMm}{2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

12-5 比で考える

■(1) $T^2 \propto a^3$ より $T \propto a^{3/2}$

$n^{3/2}$ 倍

■(2) 近日点・遠日点では速度と動径が垂直なので、面積速度一定は $rv = \text{一定}$ と書ける

$r_1 v_1 = r_2 v_2$ 、 $r_1 = \frac{r_2}{k}$ より $v_1 = k v_2 \rightarrow k$ 倍

■(3) ケプラーの第2法則（面積速度一定）。

力学的には角運動量保存と同じ内容で、中心力では常に成り立つ。

答 (1) $n^{3/2}$ 倍 (2) k 倍 (3) ケプラーの第2法則（面積速度一定）